

ELÄKETURVAKESKUKSEN
KÄSIKIRJOJA



Työkyvyttömyyseläkkeiden z-mallin sovittaminen

JAAKKO AHO

ELÄKETURVAKESKUKSEN KÄSIKIRJOJA 02/2020

Työkyvyttömyyseläkkeiden z-mallin sovittaminen

JAAKKO AHO

Eläketurvakeskus

00065 ELÄKETURVAKESKUS

Puhelin: 029 411 20

Sähköposti: etunimi.sukunimi@etk.fi

Pensionsskyddscentralen

00065 PENSIONSSKYDDSCENTRALEN

Telefon: 029 411 20

E-post: förnamn.efternamn@etk.fi

Finnish Centre for Pensions

FI-00065 ELÄKETURVAKESKUS, FINLAND

Phone: +358 29 411 20

E-mail: firstname.surname@etk.fi

Helsinki 2020

ISBN 978-951-691-325-7 (PDF)

ISSN 1798-7504 (verkkójulkaisu)

Abstract

The Finnish earnings-related pension system insures disability. Disability benefits are funded by contributions and collective buffers as well as by individual reserves. Reserves are calculated by *z-model*. This model has been used since the beginning of the Finnish pension system in 1962.

Z-model provides actuarial techniques for all life and pension insurances. However today Finnish pension system uses z-model mainly on occurred disability cases. Capital value coefficient for occurred cases is

$$A(x, u, w) = \int_0^{w-x} \sum_{j=1}^n \frac{z_j(x, u)}{z(x, u)} e^{-(\gamma_j - \beta_j)h} \cdot e^{-\delta \cdot h} dh$$

where *z-function*

$$z(x, u) = \sum_{j=1}^n z_j(x, u) = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{\beta_j x - \gamma_j u},$$

x is age of the individual, u is actual time of disability and n is the number of disability types used in model. *Z-parameters* $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ are required to fit into data.

This paper presents new *iteration method* for data fitting. The method uses two disability types ($n = 2$). Short disability type ($j = 1$) and long disability type ($j = 2$). This method modifies values of disability incidence parameters α_j and β_j in order to turn actuarial profit into fixed value. Method also modifies values of parameters as to distribute fixed profit in terms of x and u as smoothly as possible.

This paper contains iteration calculations. Data is collected from Finnish pension insurance companies. As a result of calculations we have new values for z-parameters. Today the Finnish pension system uses values of z-parameters which were fitted into data decades ago. Those values do not work appropriately anymore. The calculations indicate that iteration method provides a new practice for fitting z-model into data quite easily.

SISÄLTÖ

1	Johdanto	7
2	Työeläkkeiden työkyvyttömyysetuudet	9
	2.1 Etuudet	9
	2.2 Rahoitus	10
3	Z-malli	13
	3.1 Z-funktio	13
	3.2 Mallin käytöstä työeläkkeissä	17
	3.3 Pääoma-arvokertoimet	18
4	Z-parametrien sovitus	21
	4.1 Pääoma-arvoylijäämä	21
	4.2 Aineisto	23
	4.3 Parametrien iterointi	24
	4.3.1 Iteroinnin kiinnitykset	25
	4.3.2 Iteroinnin algoritmi	26
	4.4 Raaka laskenta	28
5	Sovitusharjoitus	29
	5.1 Aineisto	29
	5.2 Iterointi	32
	5.2.1 Sovituksen pääoma-arvoylijäämä	33
	5.2.2 Iteroinnin kulku	34
	5.2.3 Iterointiparametrit	35
	5.3 Raaka laskenta	42
6	Muista malleista	45
7	Johtopäätökset	47
	Lähteet	49
	Liitteet	51
	A Ohjelmakoodi	51

1 Johdanto

Työkyvyttömyysetuuksien vakuuttamisessa tarvittava vakuutustekninen laskenta voidaan suorittaa työkyvyttömyyttä mallintavan ns. z-mallin avulla. Z-malli on ollut käytössä työeläkkeiden vakuutustekniikassa työeläkejärjestelmän alusta eli vuodesta 1962 asti. Aikaisemmin työkyvyttömyysetuuksien vakuutustekniikkaa on tarvittu laajemmin erityisesti lakisääteisissä ns. rekisteröidyissä lisäeläkejärjestelyissä. Vuosituhannen vaihteen jälkeen laajempi tarve on vähitellen poistunut ja huomio on kiinnittynyt työkyvyttömyysetuuksien vakuutustekniikassa alkaneiden työkyvyttömyysetuuksien päättävyyteen. Siten työkyvyttömyyden alkavuuksissa tapahtuneet viimeaikaiset muutokset eivät ole luoneet välttämätöntä painetta sovittaa työeläkkeiden laskuperusteissa määrättyjen parametrien arvoja uudelleen. Nykyisten laskuperusteiden parametriarvot ovat vuodelta 1986.

Maksussa olevien työkyvyttömyysetuuksien vakuutusliike on pitkään ollut työeläkkeissä ylijäämäinen. Ylijäämä on kuitenkin vakuutusliikkeen kokonaisuuden kannalta ollut vähäinen ja se on voitu ottaa huomioon vakuutusmaksun työkyvyttömyysoosan tasossa. Edellisestä z-mallin sovitustyöstä on kulunut useita vuosikymmeniä, joten tarve sovitustyölle on kasvanut ajan myötä. Työkyvyttömyysetuuksien päättävyyden mallintaminen vaikuttaa työeläkejärjestelmässä mm. työnantajien vakuutusmaksuihin. Tarvetta on vielä lisännyt mm. se, että kuntouttamisen määrä on kasvanut työeläkejärjestelmässä.

Tämä julkaisu vastaa heinäkuussa 2020 allekirjoittaneen tekemää SHV-työtä. Tässä esitetään suoraviivainen menettely z-mallin parametrien määrittämiseen. Luvussa 2 kuvataan työkyvyttömyysetuuksia. Luvussa 3 kuvataan z-mallin teoriaa. Luvussa 4 kuvataan uusi menetelmä mallin sovittamiselle. Luvussa 5 esitellään tässä työssä tehty sovitusharjoitus. Luvussa 6 on pohdittu muita malleja ja liitteeseen A on lisätty sovitusharjoituksessa käytetty SAS-ohjelmakoodi.

Olen hyödyntänyt sovitustyössä useiden henkilöiden työpanosta. Sovituksen ohjelmakoodit olen kirjoittanut yhdessä Eläketurvakeskuksen matemaatikon Jarno Variksen kanssa. Jarno on muodostanut lukuisia rekisteriaineistoja ennen tämän työn lopullista sovitusta ja hän on ollut mukana ideoimassa tässä esitettyä iterointimenettelyä. Sovitustyötä on kommentoitu Telan laskuperustejaoksessa ja sen asettamassa alaryhmässä ns. z-ryhmässä. Sovitusharjoituksen aineisto on koottu työeläkeyhtiöissä muodostetuista rekisteripoinninnoista. Eläketurvakeskuksen Eeva Puuperä ja Merja Raunis ovat auttaneet minua tämän julkaisun taittotyössä.

Kiitos kaikille osallistuneille henkilöille.

2 Työeläkkeiden työkyvyttömyysetuudet

Seuraavassa kuvataan, mitä työkyvyttömyysetuuksia työeläkkeisiin sisältyy ja miten etuudet rahoitetaan eri työeläkelaeissa. Laajempaa tietoa työeläkkeiden työkyvyttömyysetuuksista ja niiden rahoituksesta on esim. Eläketurvakeskuksen verkkosivuilla www.etk.fi. Etuuksia on tarkasteltu laajemmin tutkimuksessa (Rantala ym. 2017). Rahoitusta on käsitelty esim. Eläketurvakeskuksen käsikirjassa (Lehtovirta 2020) ja raportissa (Kiviniemi 2019).

2.1 Etuudet

Suomen työeläkejärjestelmän työkyvyttömyysetuudet voidaan jakaa tarkoitukseltaan kolmeen eri tyyppiin. Vanhuuseläkkeen alkamiseen asti luvatut työkyvyttömyyseläkkeet, määräaikaiset kuntoutustuet sekä lyhytkestoiset työkykyä aktivoivat kuntoutusrahat ja -avustukset.

Toistaiseksi voimassa olevat työkyvyttömyyseläkkeet myönnetään vakuutetuille, jossa työkyvyn parantumiselle ei nähdä todellisia mahdollisuuksia. Määräaikaiset kuntoutustuet myönnetään odotuksella, että työkyky paranee. Työkyvyn kehitystä seurataan näissä tapauksissa. Lyhytaikainen kuntoutusraha tai -avustus myönnetään jaksolle, jossa henkilön työkyvyn kehitystä pyritään edistämään toimenpitein.

Työkyvyttömyysetuus voidaan myöntää joko täysimääräisenä tai osittaisena. Etuus määrätään täysimääräisenä, jos henkilön työkyky on alentunut vähintään kolme viidesosaa. Osittainen etuus määrätään tilanteessa, jossa henkilön työkyvyn arvioidaan olevan alentunut vähintään kaksi viidesosaa, mutta alle kolme viidesosaa. Osittainen etuus on työeläke-etuuksissa puolet täysimääräisestä. Osittaisessa etuudessa odotuksena on, että henkilö kykenee tekemään etuuden rinnalla osittain työtä.

Edellä on kuvattu työeläkejärjestelmän nykyisiä työkyvyttömyysetuuksia. Niihin saattaa jatkossa tulla muutoksia. Esimerkiksi etuuksien jakaminen kaavamaisesti joko täysimääräiseen tai puolikkaaseen ei aina kannusta mahdolliseen työnteokoon. Tästä johtuen sosiaali- ja terveystieteiden ministeriössä on valmisteilla ns. lineaarinen malli, jossa osittainen etuus voisi määräytyä lineaarisesti nollan ja puolikkaan välillä riippuen henkilön työnteon määrästä (työryhmäraportti 2017).

2.2 Rahoitus

Etuusperusteisten työkyvyttömyysetuuksien kustannuksiin voidaan varautua eri tavoin. Rahastoivassa tekniikassa varautuminen tehdään ennakoivasti sillä hetkellä, kun lupaus mahdollisesta työkyvyttömyysetuudesta annetaan. Rahastoivan tekniikan vastakohta on jakojärjestelmä. Siinä työkyvyttömyysetuuksien kustannukset katetaan menojen kanssa samaan aikaan kerättävillä vakuutusmaksuilla. Suomen työeläkejärjestelmässä rahastointitekniikka on rahastoivan ja jakojärjestelmän yhdistelmä.

Työntekijän eläkelaisa työkyvyttömyysetuudet rahastoidaan osittain. Rahastointia ei aloiteta vakuutuksen alkaessa, vaan etuuden kustannuksiin varaudutaan kollektiivisilla varauksilla keskimäärin noin vuosi ennen vakuutustapahtumaa. Vakuutustapahtuman jälkeen etuudensaajalla on yleensä noin vuoden kestävä sairasmakuutus. Sairasmakuutuksen etuusmenoa ei kustanneta työeläkejärjestelmästä. Sairasmakuutuksen jälkeen työeläkejärjestelmän etuus tulee maksuun. Samalla alkaa etuuden yksilökohtainen rahastointi. Rahastointi tehdään vain työkyvyttömyyseläkkeisiin ja määräaikaisiin kuntoutustukiin siltä osin, kun etuus katsotaan syntyneen kyseisestä vakuutuksesta. Tulevat indeksikorotukset, kertakorotus ja aikaisemmista vakuutuksista sekä muista työeläkelaeista kertyneet etuusosat eivät sisälly vakuutuksen rahastoitavaan osaan. Ne rahoitetaan muilla tavoin. Yksilökohtainen rahastointi mitoitetaan vanhuuseläkkeen alkamiseen asti ottaen huomioon mahdollinen etuuden ennaikainen päättyminen ja korkoutus. Rahastoinnista syntynyt kustannus katetaan edellä mainituilla kollektiivisilla varauksilla. Lyhyissä kuntoutusrahoissa ja -avustuksissa kustannuksia katetaan kollektiivisilla varauksilla, mutta niissä ei varauduta vastaisiin menoihin.

Julkisen puolen työeläkkeissä työkyvyttömyysetuuksiin ei varauduta kohdennetuilla rahastoilla. Niissä kustannukset katetaan kuluvan vuoden maksuilla ja aikaisempien vuosien vakuutusmaksuista kertyneillä puskurirahastoilla.

Yrittäjien työkyvyttömyysetuudet katetaan kuluvan vuoden vakuutusmaksuilla ja valtion maksamilla kustannusosuuksilla.

Työntekijän eläkelain voimaanpanolaissa määrätään rekisteröidyistä lisäeläkejärjestelyistä. Lisäeläkejärjestelyissä ennakoivan rahastoinnin tarve on yleensä vahvempi, koska kustannuksien jättäminen tulevien vakuutusmaksujen varaan ei usein ole mahdollista. Rekisteröidyissä lisäeläkejärjestelyissä työkyvyttömyysetuuksien rahastointi oli aiemmin yksilökohtaista sekä alkaneiden että vastaisten työkyvyttömyysetuuksien kohdalla. Tosin vastaisessa rahastoinnissa tulevan ajan

rahastointi katettiin vuosittaisilla riskimaksuilla.

Vuoden 2016 lopussa rekisteröityjen lisäeläkejärjestelyjen voimassa olevat vakuutukset päätettiin ja samalla luovuttiin yksilökohtaisesta rahastoinnista. Rekisteröityjen lisäeläkevakuutusten rahastot eivät riitä kattamaan luvattuja etuuksia. Rahoitusvajetta katetaan vuosittain perusturvan tasausjärjestelmästä. Rekisteröidyistä lisäeläkevakuutuksista on tarkemmin käsikirjassa (Ryynänen ym. 2015).

Vapaamuotoisissa lisäeläkejärjestelyissä etuusperusteisten työkyvyttömyysetuuksien rahastointitekniikka on järjestettävä mahdollisimman ennakkollisesti. Lakisääteisessä työeläkejärjestelmässä työkyvyttömyysetuuksien ennakkollista rahastointia voi kuitenkin kyseenalaistaa. Vanhuuseläkkeiden rahastoinnissa aikajänne on työkyvyttömyysetuuksia pidempää, joten se on sijoittamisen näkökulmasta hyödyllisempää. Työkyvyttömyystapauksissa rahastoinnin kesto on yleisemmin joitain vuosia, kun taas vanhuuseläkkeiden osalta rahastojen duraatiot ovat vuosikymmeniä. Työkyvyttömyysetuuksissa sijoituskohteiden tulee siis olla vanhuuseläkkeitä vakaampia ja likvidimpiä eli sijoitusten tuotto-odotus jää työkyvyttömyysetuuksissa matalammaksi.

Sijoitusnäkökulmasta huolimatta työntekijän eläkelaisrahoitukseen myöskin sisältyy työkyvyttömyysetuuksia. Tätä perustellaan hajautettuun järjestelmään sisältyvällä vakuutusperiaatteella. Järjestelmässä on useita eläkevakuuttajia ja lähtökohtaisesti vakuuttajalle syntyy työkyvyttömyysvastuuta etuuksien myönnöstä. Lisäksi rahastointiin on rakennettu mekanismi, joka ohjaa työkyvyttömyyskustannuksia enemmän niille työnantajille, joiden työntekijöissä havaintaan enemmän työkyvyttömyyttä. Työeläkeyhtiöissä suurten työnantajien vakuutusmaksut määräytyvät ns. maksuluokkamallin mukaan. Vastaavanlainen vakuutusmaksujen malli sisältyy myös merimiesten eläketurva vakuuttavan Merimieseläkekassan vakuutuksille. Myös eläkesäätiöissä ja -kassoissa vakuutuksista syntyneitä työkyvyttömyysmenoja ohjataan kyseisille työnantajille. Julkisenkin puolen työeläkevakuutuksiin on rakennettu maksuluokkamallin kaltaisia mekanismeja.

Työeläketurvan tarkat rahoitussäännöt on kirjattu lakiin ja sen alemman asteisiin säännöksiin. Säännöksiä löytää mm. Eläketurvakeskuksen verkkopalvelussa www.saadospalvelu.fi olevista laeista ja laskuperusteista.

Työntekijän eläkelain mukaisessa rahoitustekniikassa työkyvyttömyyttä mallinetaan ns. z-mallilla. Seuraavassa luvussa kuvataan kyseinen malli.

3 Z-malli

Seuraavassa määritellään z-mallin funktioita ja kuvataan mallin käyttöä työeläkkeissä. Mallia on kuvattu eri teoksissa (Lehtovirta 2020, Gauffin 1981, Karpoja 1998 ja Tuomikoski 1986) sekä laskuperusteissa (yleisperusteet 2018). Merkintätavoissa on pieniä eroja.

Työntekijäin eläkelain mukaiset ensimmäiset laskuperusteet valmistuivat vuonna 1962 (Laskuperustemalli 1962). Sen perusteluissa mainitaan, että laskuperustemalli on kokonaisuudessaan laadittu siten, että sen analyttisiä lausekkeita voidaan soveltaa kaikessa henki- ja eläkevakuutustoiminnassa. Perusteen työkyvyttömyyttä mallintavat lausekkeet muodostuivat z-mallista. Mallista on analyttisesti laskettavissa todennäköisyydet sekä työkyvyttömyyden alkavuudelle että jatkuvuudelle.

3.1 Z-funktio

Työkyvyttömyyttä mallintava *z-funktio*

$$(3.1) \quad z(x, u) = \sum_{j=1}^n z_j(x, u) = \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{\beta_j x - \gamma_j u},$$

missä x on henkilön ikä, u on työkyvyttömyyden kesto ja n on positiivinen kokonaisluku. Suureita $\alpha_j, \beta_j, \gamma_j$ kutsutaan tässä *z-mallin parametreiksi*.

Funktio $z_j(x, u)$ kertoo todennäköisyyden sille, että vastasyntynyt on iässä x tyyppin j mukaisesti työkyvytön ja kyseinen työkyvyttömyys on kestänyt ajan u .

Funktio on kahden tekijän tulo

$$(3.2) \quad z_j(x, u) = p_{j,alk}(x - u) \cdot p_{j,jat}(u | x - u).$$

Todennäköisyys, että vastasyntynyt tulee tyyppin j mukaisesti työkyvyttömäksi iässä $x - u$ on

$$(3.3) \quad p_{j,alk}(x - u) = \alpha_j e^{\beta_j(x - u)}.$$

Todennäköisyys, että iässä $x - u$ alkanut tyypin j työkyvyttömyys jatkuu vähintään ajan u on

$$(3.4) \quad p_{j,jat}(u | x - u) = e^{-(\gamma_j - \beta_j)u}.$$

Työkyvyttömyyden alkavuutta on mallinnettu eksponenttifunktiolla ja jatkuvuutta eksponenttijakaumalla. Todennäköisyys työkyvyttömyyden jatkumisesta ei tässä riipu henkilön iästä eikä työkyvyttömyyden alkamishetkestä.

Eksponenttijakauman muistittomuusominaisuus ei sellaisenaan sovellu työkyvyttömyyden mallintamiseen. Työkyvyttömyyden alkuvaiheessa on todennäköisempää, että joko työkyky paranee tai henkilö kuolee, eli etuus päättyy. Työkyvyttömyyden pitkittyessä todennäköisyys sen jatkumiselle kasvaa. Siten z -funktiossa (3.1) työkyvyttömyystyyppejä tulee olla useita ja työkyvyttömyyden keston jakaumaksi tulee sekoitus useammasta eksponenttijakaumasta.

Todennäköisyys, että iässä $x - u$ alkanut ja ajan u kestänyt työkyvyttömyys jatkuu vähintään ajan h on

$$(3.5) \quad \frac{z(x+h, u+h)}{z(x, u)} = \sum_{j=1}^n \frac{z_j(x, u)}{z(x, u)} e^{-(\gamma_j - \beta_j)h}.$$

Z -funktio ei erottele työkyvyttömyyden päättyvyyden syytä. Työkyvyttömyys voi päättyä joko kuolemaan tai paranemiseen. Siitä taas seuraa, että työkyvyttömyysetuus päättyy. Lisäksi työkyvyttömyysetuus voi päättyä vanhuuseläkkeelle siirtymiseen. Vanhuuseläkkeelle siirtymistä ei kuitenkaan tarvitse ottaa huomioon z -funktiossa. Vanhuuseläkkeelle siirtyminen otetaan huomioon pääomavertokertoimien laskennassa, ks. luku 3.3.

Puhtaan kuolevuuden mallintamisessa käytetään iästä t riippuva kuolevuusfunktioita μ_t . Se määritellään seuraavan todennäköisyyden kautta.

Vastasyntyneen todennäköisyys olla elossa iässä x on

$$(3.6) \quad p_{elo}(x) = e^{-\int_0^x \mu_t dt}.$$

Kuolevuusfunktio toimii siis pääoma-arvojen laskennassa vastaavasti kuin korkoutuvuusfunktio. Työntekijän eläkelaisissa vanhuuseläkkeiden kuolevuus mallinetaan ns. Gompertz-kuolevuudella

$$(3.7) \quad \mu_t = a_1 e^{a_2(t+b_2)},$$

missä a_1, a_2 ja b_2 ovat mallin parametreja. Gompertz-kuolevuutta on käsitelty esim. käsikirjassa (Lahti & Toro 2018).

Tulevan työkyvyttömyyden mallintamisessa kuolevuus tulee käsitellä omana tekijänä. Usein riittää käyttää iästä riippumatona positiivista vakiota μ , koska tarkasteltavassa ikävälissä kuolevuuden muutokset ovat vähäisempiä. Siis

$$(3.8) \quad p_{elo}(x) = e^{-\mu \cdot x}.$$

Todennäköisyys, että x vuotta täyttävä henkilö tulee vuoden aikana työkyvyttömäksi, voidaan approksimoida z-mallilla vakiokuolevuutta käyttäen lausekkeella

$$(3.9) \quad p_{alk}(x | elo) = \int_{x-1/2}^{x+1/2} \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{(\beta_j - \mu)t} dt \approx \sum_{j=1}^n \alpha_j e^{(\beta_j - \mu)x}.$$

Luvussa 4 esitetään menetelmä z-parametrien sovittamiseen. Seuraava esimerkki havainnollistaa z-mallia, sen parametreja ja sekoitusluonnetta.

Esimerkki 3.1.1. Mallinetaan työkyvyttömyyttä jakamalla se kahteen tyyppiin, lyhytkestoisiin työkyvyttömyyksiin $j = 1$ ja pitkäkestoisiin työkyvyttömyyksiin $j = 2$.

Olkoit lyhyiden tyyppien keskimääräinen kesto vuoden ja pitkien tyyppien kymmenen vuotta. Kaavan (3.4) mukaan

$$\begin{aligned} \gamma_1 - \beta_1 &= 1 \\ \gamma_2 - \beta_2 &= 1/10. \end{aligned}$$

Olkoit lyhyiden työkyvyttömyysalkavuus kaikissa ikäluokissa vakio 0,4 % ja pitkien alkavuus iän myötä kasvava siten, että iässä 20 se on 0,1 % ja iässä 60 se on 1,6 %.

Olkoit kaikkien ikäluokkien kuolevuus $\mu = 0,002$.

Kaavan (3.9) mukaan

$$\alpha_1 e^{(\beta_1 - \mu)x} = 0,004$$

$$\alpha_2 e^{(\beta_2 - \mu)20} = 0,001$$

$$\alpha_2 e^{(\beta_2 - \mu)60} = 0,016$$

kaikilla x :n arvoilla.

Parametrien arvot ovat siten pyöristettyinä

$$\alpha_1 = 0,00400$$

$$\beta_1 = 0,002$$

$$\gamma_1 = 1,002$$

$$\alpha_2 = 0,00025$$

$$\beta_2 = 0,071$$

$$\gamma_1 = 0,171.$$

Tarkastellaan näillä parametreilla 40 vuotta täyttäneitä henkilöä, joka on ollut työkyvytön kolme vuotta eli $x = 40$ ja $u = 3$.

Tapaus on

$$p_1(\text{osuus}) = z_1(40, 3)/z(40, 3) = 0,00020/0,00258 = 8 \%$$

todennäköisyydellä lyhyen tyypin ja $p_2(\text{osuus}) = 92 \%$ todennäköisyydellä pitkän tyypin työkyvyttömyys. Lyhyen tyypin työkyvyttömyys jatkuu

$$e^{-1} = 37 \%$$

todennäköisyydellä vähintään vuoden ja pitkä

$$e^{-1/10} = 90 \%$$

todennäköisyydellä.

Todennäköisyys, että tarkasteltavan henkilön työkyvyttömyys jatkuu vähintään vuoden on

$$p(\text{vuoden}) = 0,08 \cdot 0,37 + 0,92 \cdot 0,90 = 86\%.$$

Vastaavasti voidaan laskea seuraavan taulukon mukaiset todennäköisyydet 40 vuotiaan henkilön työkyvyttömyyden jatkumiseen vuodella eri kestoisissa tapauksissa. Taulukosta nähdään, että lyhyiden työkyvyttömyystyyppien osuus alenee keston kasvaessa. Alenema johtuu lyhyen tyyppin korkeammasta päättymistodennäköisyydestä.

u	$p_1(\text{osuus})$	$p_2(\text{osuus})$	$p(\text{vuoden})$
0	50 %	50 %	63 %
1	31 %	69 %	74 %
2	16 %	84 %	82 %
3	8 %	92 %	86 %
4	4 %	96 %	89 %
5	2 %	98 %	90 %
6	1 %	99 %	90 %

3.2 Mallin käytöstä työeläkkeissä

Z-mallia on käytetty työeläkejärjestelmässä sen alusta asti eli vuodesta 1962 alkaen. Työeläkejärjestelmän laskuperustemallin käyttöönotossa tavoitteena oli, että vakuutusmaksujen ja vastuuvielkojen lausekkeet voidaan muodostaa analyttisistä lausekkeista kaikkeen henki- ja eläkevakuutustoimintaan (laskuperustemalli 1962). Vuonna 1962 tietokoneiden laskentatehot olivat vaatimattomia, joten myös se määrittäi vaatimuksia mallille. Z-malli täytti vaatimukset.

Olosuhteet ovat muuttuneet vuodesta 1962. Työeläkejärjestelmän rekisteröidyn lisäturvan vakuuttaminen on lopetettu ja tietokoneiden laskentatehot ovat kasvaneet. Työurat ovat pidentyneet ja työeläkekuntoutuksen rooli on kasvanut. Työeläkevakuuttajien määrä on vähentynyt ja entisen omavastuumallin sijasta käytössä on maksuluokkamalli, jolla pyritään vaikuttamaan työnantajien toimintaan työntekijöidensä työkyvyn edistämiseksi. Maksuluokkamalli vaikuttaa työnantajien vakuutusmaksuihin uusien myönnettyjen työkyvyttömyyseläkkeiden pääoma-arvojen kautta. Entisessä omavastuumallissa myös myönnön jälkeen tapahtuneet muutokset otettiin huomioon työnantajan vakuutusmaksun laskennassa.

Rekisteröidyn lisäturvan laskuperusteissa vakuutusmaksujen ja vastuuvelan laskentaan sisältyi aiemmin sekä vastaisen että alkaneen työkyvyttömyyden vakuutustekniikkaa (lisäeläkevakuutuksen laskuperusteet 2016). Nykyisin työkyvyttömyyseläkkeiden vakuutustekniikan tarve on pääasiassa vain perusturvan alkaneen vastuuvelan laskennassa (erityisperusteet 2020). Tästä huolimatta, työntekijän eläkelain mukaisissa laskuperusteissa on käytössä edelleen z-malli ja valmius analyyttisiin lausekkeisiin kaiken henki- ja eläkevakuutustoiminnan osalta (ylesperusteet 2018). Vastaisen työkyvyttömyyseläkkeen vakuutustekniikkaa käytetään kuitenkin säädöstasolla EU-virkamiesten eläkeoikeuksien siirtomäärien laskennassa (EU-siirtoerusteet).

Työntekijän eläkelain mukaisissa laskuperusteissa on käytössä sekä yleis- että erityisparametreja. Erityisparametreilla laskuperustemalli sovitetaan tarvittaessa käytettäväksi sovellettavaa tilannetta varten. Esimerkiksi kuolevuudessa ikäsiirtoja määrätään syntymävuosiluokan ja sukupuolen mukaan. Z-mallissa erityisparametreilla z-funktiota voidaan tarvittaessa sovittaa joko eri työkyvyttömyyslajeihin tai johonkin tiettyyn vakuutuskantaan sopivaksi.

Nykyisissä työntekijän eläkelain laskuperusteissa z-mallin työkyvyttömyystyyppejä on kolme. Lyhyiden tyyppien keskimääräinen kesto on 1,6 vuotta, keskipitkien tyyppien 20 vuotta ja pitkien tyyppien 62,5 vuotta. Laskuperusteiden yleisiä z-parametreja on muutettu viimeksi vuonna 1986. Alkaneiden työkyvyttömyysetuuksien vastuuvelan laskentaan vaikuttavia erityisparametrien arvomuutoksia ei ole tehty. Vastaisten etuuksien laskennassa työkyvyttömyyden alkavuutta on muutettu erityisparametrien arvoilla, esim. EU-virkamiesten eläkeoikeuden siirtoerusteissa alkavuutta on alennettu 40 prosenttiin yleisten parametrien asettamasta tasosta. Alkavuusmuutokset on tehty kaikkiin työkyvyttömyystyyppeihin samassa suhteessa, jolloin päättävyysoletus säilyy samana.

3.3 Pääoma-arvokertoimet

Työkyvyttömyysetuuksien pääoma-arvot on määritelty Eläketurvakeskuk-
sen käsikirjassa (Lahti & Toro 2018). Käsikirjassa on esitetty sekä vastaisten työkyvyttömyysetuuksien että alkaneiden työkyvyttömyysetuuksien pääoma-arvokertoimien laskenta kun $n = 3$. Laskentakaavat voi tarvittaessa yleistää kaikille arvoille $n \in \mathbf{N}$.

Tässä esitetään vain alkaneen työkyvyttömyysetuuden pääoma-arvokerroin. Seuraava esitystapa poikkeaa käsikirjan mukaisesta. Käsikirjan esitystapa vastaa pitkään käytössä ollutta laskentatapaa. Tässä esitysmuoto havainnollistaa z-mallin

sekoitusluonnetta.

Työkyvyttömyystyyppin $j \in \{1, \dots, n\}$ alkaneen työkyvyttömyysetuuden pääoma-arvokerroin

$$(3.10) \quad A_{alk,j}(x, u, w) = \int_0^{w-x} e^{-(\gamma_j - \beta_j)h} \cdot e^{-\delta \cdot h} dh \\ = \frac{1 - e^{-((\gamma_j - \beta_j + \delta)(w-x))}}{\gamma_j - \beta_j + \delta},$$

missä x on henkilön ikä, u on työkyvyttömyyden kesto, w on etuuden pääteikä ja vakio δ on edellä mainitun käsikirjan mukainen korkoutuvuus. Työkyvyttömyystyyppin j pääoma-arvokerroin vastaa siis muodoltaan elinaikakorkoa.

Z-mallin mukaisen alkaneen työkyvyttömyysetuuden pääoma-arvokerroin

$$(3.11) \quad A_{alk}(x, u, w) = \int_0^{w-x} \sum_{j=1}^n \frac{z_j(x, u)}{z(x, u)} e^{-(\gamma_j - \beta_j)h} \cdot e^{-\delta \cdot h} dh \\ = \sum_{j=1}^n \frac{z_j(x, u)}{z(x, u)} A_{alk,j}(x, u, w).$$

Myös pääoma-arvokerroin on siten sekoitus eri työkyvyttömyystyyppien mukaisista pääoma-arvokertoimista. Z-mallin sekoitusluonnetta on havainnollisesttu esimerkissä 3.1.1.

4 Z-parametrien sovitus

Työntekijän eläkelain mukaisten yleisten laskuperusteiden z-parametrien nykyiset arvot perustuvat Jaakko Tuomikosken SHV-työssä (Tuomikoski 1986) esitettyyn z-pinnan sovitusmenetelmään. Siinä osa z-parametreista kiinnitetään ja avoimet parametrit sovitetaan aineistosta laskettuihin z-funktion arvoihin pinnansovitusmenetelmällä.

Z-malli tarjoaa mahdollisuuden sekä vastaisten että alkaneiden työkyvyttömyysetuuksien mallintamiseen. Työeläkkeiden vakuutustekniikassa tarve on nykyisin alkaneissa työkyvyttömyysetuuksissa. Seuraavassa sovituksessa keskitytään päättyvyyden mallintamiseen. Alkavuustaso sovitetaan suoraviivaisesti viimeisimmän rekisteritiedon perusteella z-mallin vaatimaan eksponenttifunktion muotoon. Päättyvydet sovitetaan iteroimalla. Kyse on uudesta menetelmästä, jota ei ole sovellettu aiemmin.

Ennen iterointimenetelmän kuvaamista on määriteltävä alkaneen työkyvyttömyyseläkeliiikkeen tulos ns. *pääoma-arvoylijäämä* sekä menetelmässä tarvittava aineisto.

4.1 Pääoma-arvoylijäämä

Alkaneiden tunnettujen työkyvyttömyyseläkkeiden vastuuelka lasketaan työntekijän eläkelaisissa z-mallin pääoma-arvokertoimilla. Vastuuelan osuvuutta seurataan vakuutusliikkeen tuloksella. Tulosta kutsutaan pääoma-arvoylijäämäksi. Vuoden v tulos lasketaan seuraavista kolmesta erillisestä henkilöjoukosta seuraavasti.

Olkoon $\Gamma_v(1)$ niiden henkilöiden joukko, joille on laskettu alkaneiden työkyvyttömyysetuuksien vastuuelka per $31.12.v - 1$.

Olkoon $\Gamma_v(2)$ niiden henkilöiden joukko, joille ei ole laskettu vastuuelkaa per $31.12.v - 1$, mutta joille on myönnetty vuoden v aikana työkyvyttömyysetuus maksettavaksi ns. entisin perustein viimeistään $1.1.v + 1$ alkaen. Joukon $\Gamma_v(2)$ henkilöiden työkyvyttömyysetuudet ovat olleet aiemmin maksussa ja päättyneet ennen $1.1.v$, mutta vuoden v aikana he palaavat työkyvyttömäksi samasta sairaudesta tai vammasta.

Olkoon $\Gamma_v(3)$ niiden henkilöiden joukko, joille ei ole laskettu vastuuelkaa per

31.12. $v - 1$, mutta joille on myönnetty vuoden v aikana työkyvyttömyysetuus maksettavaksi uusin perustein viimeistään 1.1. $v + 1$ alkaen.

Olkoot $\Gamma_v = \Gamma_v(1) \cup \Gamma_v(2) \cup \Gamma_v(3)$ ja henkilö $i \in \Gamma_v$. Olkoon $E_v(i)$ henkilön i rahastoidun työkyvyttömyysetuuden määrä (euroa/kk) vuoden v lopussa, $A_v(i)$ henkilön i vastuuvelan laskennassa käytetty pääoma-arvokerroin per 31.12. v ja $M_v(i)$ on vuonna v henkilölle i maksettujen rahastoitujen työkyvyttömyysetuuksien yhteismäärä.

Henkilön $i \in \Gamma(1)$ pääoma-arvoylijäämä per 30.6. v on

$$(4.1) \quad T_v(i) = (1 + i_0)^{1/2} \cdot A_{v-1}(i) \cdot 12 \cdot E_{v-1}(i) \\ - (1 + i_0)^{-1/2} \cdot A_v(i) \cdot 12 \cdot E_v(i) \\ - M_v(i),$$

missä i_0 on pääoma-arvokertoimen laskennassa käytetty diskonttokorko.

Henkilön $i \in \Gamma(2)$ pääoma-arvoylijäämä per 30.6. v on

$$(4.2) \quad T_v(i) = -(1 + i_0)^{1/2} \cdot A_v(i) \cdot 12 \cdot E_v(i) \\ - (1 + i_0)^{\frac{1-kk}{24}} \cdot M_v(i),$$

missä kk on etuuden alkamiskuukausi vuonna v .

Henkilön $i \in \Gamma(3)$ pääoma-arvoylijäämä per 30.6. v on

$$(4.3) \quad T_v(i) = (1 + i_0)^{\frac{7-kk}{12}} \cdot A_{v,kk}(i) \cdot 12 \cdot E_v(i) \\ - (1 + i_0)^{-1/2} \cdot A_v(i) \cdot 12 \cdot E_v(i) \\ - (1 + i_0)^{\frac{1-kk}{24}} \cdot M_v(i),$$

missä kk on etuuden alkamiskuukausi vuonna v ja $A_{v,kk}(i)$ on vastuuvelan laskennassa käytetty pääoma-arvokerroin etuuden alkamishetkellä.

Vuoden v pääoma-arvoylijäämä

$$(4.4) \quad T_v = \sum_{i \in \Gamma} T_v(i).$$

Pääoma-arvoylijäämä ottaa huomioon työkyvyttömyyden lajimuutoksia. Esimerkiksi, jos osatyökyvyttömyyseläke muuttuu tarkasteltavan vuoden aikana

täydeksi työkyvyttömyyseläkkeeksi, muutoksesta seuraa negatiivista pääoma-arvoylijäämää. Jos eri lajeissa käytetään eri pääoma-arvokertoimia, vaikuttavat lajimuutokset myös pääoma-arvoylijäämään.

4.2 Aineisto

Sovittaminen tehdään tässä ns. poikittaisaineistoon. Aineisto perustuu pääoma-arvoylijäämän laskentaan. Siinä tarkastellaan vastuuvelan laskennassa olevaa joukkoa yksittäisen vuoden osalta. Kokonaisaineistoon on kuitenkin syytä ottaa mukaan useampia vuosia. Eri vuosien poikkileikkausaineistot yhdistetään sellaiseen.

Sovitus voidaan vaihtoehtoisesti tehdä ns. pitkittäisaineistoon. Silloin henkilöiden siirtymiä tarkastellaan pidemmältä aikajaksolta. Pitkittäisaineisto on luontevampi valinta, jos sovitusta tehdään suoraan z-funktioon. Tässä työssä painotetaan viimeisimpien vuosien havaintoja. Työkyvyttömyys on ajassa muuttuva ilmiö, jonka kehitystä on vaikea ennakoita. Tämän työn sovituksessa oletetaan, että työkyvyttömyyden päättyvyys tulee säilymään nykyisellä tasolla. Siten vanhojen vuosien aineisto saattaa vääristää sovitusta.

Sovitusaineisto muodostetaan m eri vuoden poikittaisaineistosta. Vuoden v_k , missä $k \in \{1, \dots, m\}$, sovitusaineistossa työkyvyttömyysetuuden saajan i tiedot määräytyvät pääoma-arvoylijäämän laskennassa tarvittavista suureista $E_{v-1}(i)$, $E_v(i)$ ja $M_v(i)$. Lisäksi tarvitaan tieto työkyvyttömyyseläkkeen kestosta u , etuuden pääteistä w ja etuuden saajan tilasta tarkasteltavan vuoden alussa ja lopussa. Tilalla tarkoitetaan tietoa siitä, onko etuus maksussa vai ei ja jos on, niin tarvittaessa myös etuuden laji.

Sovitusaineisto Γ määräytyy henkilöiden i yli summatuista seuraavista ns. *summary*-

x on ikä tarkasteluvuoden lopussa kokonaisina vuosina.

u on työkyvyttömyyden kesto tarkasteluvuoden lopussa kokonaisina vuosina.

w on työkyvyttömyyden pääteikä kokonaisina vuosina.

L_{alku} on työkyvyttömyysetuuden laji tarkasteluvuoden alussa.

L_{loppu} on työkyvyttömyysetuuden laji tarkasteluvuoden lopussa.

E_{alku} on henkilöiden yli laskettu työkyvyttömyysetuuksien summa tarkasteluvuoden alussa.

E_{loppu} on henkilöiden yli laskettu työkyvyttömyysetuuksien summa tarkasteluvuoden lopussa.

M on henkilöiden yli laskettu maksettujen työkyvyttömyysetuuksien summa tarkasteluvuoden aikana.

Summa-aineiston käsittely on sovituksen laskennassa tehokkaampaa kuin henkilötasolla laskettaessa. Summissa aineistosta puhdistuu myös mahdollisia henkilöiden luottamuksellisia tietoja. Lajitieto voidaan jättää summariveistä pois, mikäli z -parametrit eivät ole lajikohtaisia.

Aineiston Γ mielivaltaiselle joukolle $\Gamma' \subseteq \Gamma$ voidaan laskea työkyvyttömyyden rahapainotettu päättävyyys

$$(4.5) \quad \mu_{\Gamma'}^{\text{päättävyyys}} = 1 - \frac{\sum_{i \in \Gamma'} E_v(i)}{\sum_{i \in \Gamma'} E_{v-1}(i)}.$$

Ennen sovittamista onkin mielekästä tarkastella summariveistä laskettuja ikä- ja työkyvyttömyyden kestokohtaisia päättävyyksiä.

Työkyvyttömyyden alkavuudesta riittää ikäkohtainen tilastotieto. Työkyvyttömyyden alkavuus

$$(4.6) \quad \mu_x^{\text{alkavuus}} = \frac{l_x}{m_x},$$

missä l_x on vuoden aikana työkyvyttömäksi tulleiden x -ikäisten vakuutettujen volyyymi (esim. lukumäärä) ja m_x on vuoden alussa työkykyisten vakuutettujen x -ikäisten volyyymi.

Alkavuuden sovitus tehdään määrittämällä lineaarisella pienimmän neliösumman menetelmällä sellaiset parametrit α ja β , että

$$(4.7) \quad \alpha + \beta x \approx \ln \mu_x^{\text{alkavuus}}$$

sopivalla ikävälillä.

4.3 Parametrien iterointi

Parametrien sovittaminen tehdään edellä kuvattuun summa-aineistoon Γ . Sovitus tapahtuu iteroiden. Sen tavoitteena on löytää z -parametrit, joiden mukaan aineistolle laskettu pääoma-arvoylijäämä on halutun suuruinen ja se jakautuu summariiveittäin mahdollisimman tasaisesti.

Aineisto Γ voidaan tarvittaessa jakaa osajoukkoihin ja kullekin osajoukolle voidaan iteroida oma parametrisoitus. Tällöin on otettava huomioon mahdollinen siirtymä osajoukosta toiseen, esim. jos kuntoutustuella olevat halutaan tarkastella omana osajoukkona. Silloin tulee ottaa huomioon siirtymät kuntoutustuelta toistaiseksi voimassa oleviin työkyvyttömyyseläkkeisiin.

4.3.1 Iteroinnin kiinnitykset

Iteroinnin tavoitteena on löytää yksi käyttökelpoinen ratkaisu. Tätä varten tehdään seuraavia kiinnityksiä.

1. Iteroinnissa säädettäviä työkyvyttömyystyyppejä on kaksi. Lähtökohtaisesti $n = 2$, mutta tarvittaessa iteroinnissa voidaan ottaa huomioon muita parametrikiinnitettyjä työkyvyttömyystyyppejä. Tosin se lisää sovituksen monimutkaisuutta eikä takaa paremman ratkaisun löytämistä.
2. Työkyvyttömyystyyppien päätyvyudet kiinnitetään eli vakioidaan eksponenttijakaumien parametrit $\lambda_1 = \gamma_1 - \beta_1$ ja $\lambda_2 = \gamma_2 - \beta_2$. Iteroinnissa säädetään vain työkyvyttömyystyyppien alkavuuksia. Työkyvyttömyystyyppi $j = 1$ mallintaa lyhytkestoisia työkyvyttömyyksiä ja tyyppi $j = 2$ pitkäkestoisia työkyvyttömyystyyppejä. Parametri λ_j^{-1} kertoo keston odotusarvon tyyppille $j \in \{1, 2\}$ tilanteessa, jossa työkyvyttömyysetuudella ei olisi päätteikää.
3. Aineistolle määrätään halutun pääoma-arvoilijäämän taso. Iterointi ns. ohjaa pääoma-arvoilijäämän halutulle tasolle. Sovituksen tulee vakuutusperiaatteen mukaisesti olla turvaava eli pääoma-arvoilijäämän tulee odotusarvoisesti olla positiivinen. Lisäksi pääoma-arvoilijäämän tavoitteen asettamisessa voi ottaa huomioon muita tarpeita. Aineistoon voi esimerkiksi sisältyä vääristymää, joka on seurausta aineistomuodostuksen teknisestä toteutustavasta.
4. Summariveistä laskettu pääoma-arvojen neliöiden summa kertoo sovituksen laadun. Iterointi löytää nopeasti ratkaisun tavoiteltavalle pääoma-arvoilijäämälle. Iteroinnissa pyritään kuitenkin löytämään ratkaisu, joka toisaalta antaa halutun pääoma-arvoilijäämän ja toisaalta jakaa pääoma-arvoilijäämän tasaisesti eri summariveille. Tasaisuutta mitataan summarivien pääoma-arvoilijäämien neliöiden summalla. Mitä pienempi neliösumma on, sitä laadukkaampi sovitus on.
5. Iteroinnille määrätään askellus. Askel säätää lyhytkestoisen työkyvyttömyystyyppin alkavuutta. Jos pääoma-arvoilijäämää tulee askelluksessa vähentää, lyhyiden alkavuutta kasvatetaan. Jos taas pääoma-arvoilijäämää

tulee kasvattaa, lyhyiden alkavuutta tulee vähentää. Sääto tehdään joko parametriin α_1 tai β_1 tekijällä h_{iter} seuraavasti.

$$\alpha_1 := \alpha_1 \cdot (1 \pm h_{iter})$$

$$\beta_1 := \beta_1 \cdot (1 \pm h_{iter}).$$

Askellus tehdään parametriin α_1 , jos pääoma-arvoylijäämän korjaus halutaan kohdistaa ikäjakauman nuorempaan päähän. Vastaavasti askellus tehdään parametriin β_1 , jos korjaus halutaan kohdistaa ikäjakauman vanhempaan päähän. Aineiston ikäjakauma tulee siten jakaa kahteen osaan kiinnitetyn ikärajan x_{jako} mukaan.

4.3.2 Iteroinnin algoritmi

Iteroinnissa lyhyen työkyvyttömyystyyppin alkavuusparametreja säädetään askelittain siten, että aineiston Γ pääoma-arvoylijäämäksi saadaan haluttu summa ja summarivien yli lasketun pääoma-arvoylijäämien neliöiden summaksi mahdollisimman pieni arvo. Seuraavassa esitetään iteroinnin algoritmi.

1. Iteroitaville parametreille määrätään ensin alkuarvot. Tilastoalkavuudesta saadaan pienimmän neliösumman menetelmällä kaavan (4.7) mukaisesti arvot parametreille α ja β . Työkyvyttömyystyyppien alkavuusparametrit asetetaan niistä seuraavasti.

$$(4.8) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &= \alpha_2 = 1/2 \cdot \alpha, \\ \beta_1 &= \beta_2 = \beta. \end{aligned}$$

Työkyvyttömyystyyppien päätyvyysparametrit määräytyvät kohdan 4.3.1 kiinnityksestä 2 seuraavasti.

$$(4.9) \quad \begin{aligned} \gamma_1 &= \beta_1 + \lambda_1, \\ \gamma_2 &= \beta_2 + \lambda_2. \end{aligned}$$

2. Iterointisilmukan ensimmäisessä vaiheessa lasketaan sen hetkisen sovitteen mukainen pääoma-arvoylijäämä aineistolle Γ sekä muita tarvittavia summasuureita. Pääoma-arvoylijäämä lasketaan jokaiselle summariiville erikseen osion 4.1 mukaisesti. Olkoon $T_{x,u,w}$ summarivin pääoma-arvoylijäämä. Summasuureita ovat

$$(4.10) \quad \begin{aligned} T_{kaikki} &= \sum_{x,u,w} T_{x,u,w}, \\ T_{alku} &= \sum_{x < x_{jako}, u, w} T_{x,u,w}, \\ T_{loppu} &= \sum_{x \geq x_{jako}, u, w} T_{x,u,w}, \\ T_{nelio} &= \sum_{x,u,w} (T_{x,u,w})^2, \end{aligned}$$

missä x_{jako} on kiinnityksen 5 mukainen ikäraja.

3. Iterointisilmukan jälkimmäisessä vaiheessa sen hetkistä sovitusta muunnetaan hyödyntäen edellä laskettuja pääoma-arvoylijäämän summasuureita seuraavasti.

$$(4.11) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &:= \alpha_1 \cdot (1 + h_{iter}), \text{ jos} \\ &\quad T_{kaikki} < T_{tavoite} \text{ ja } T_{alku} < T_{loppu}. \\ \beta_1 &:= \beta_1 \cdot (1 + h_{iter}), \text{ jos} \\ &\quad T_{kaikki} < T_{tavoite} \text{ ja } T_{alku} \geq T_{loppu}. \\ \alpha_1 &:= \alpha_1 \cdot (1 - h_{iter}), \text{ jos} \\ &\quad T_{kaikki} \geq T_{tavoite} \text{ ja } T_{alku} > T_{loppu}. \\ \beta_1 &:= \beta_1 \cdot (1 - h_{iter}), \text{ jos} \\ &\quad T_{kaikki} \geq T_{tavoite} \text{ ja } T_{alku} \leq T_{loppu}. \end{aligned}$$

Tekijä h_{iter} on kiinnityksen 5 mukainen ja pääoma-arvoylijäämä $T_{tavoite}$ on kiinnityksen 3 mukainen. Pitkän työkyvyttömyystyyppin alkavuusparametrit sovitetaan tilastoalkavuuteen pienimmän neliösumman menetelmällä. Regressio tehdään osion 4.2 mukaisesti hyödyntäen edellä määrittyjä lyhyen tyyppin alkavuusparametreja seuraavasti.

$$(4.12) \quad \alpha_2 e^{\beta_2 x} \approx \mu_x^{\text{alkavuus}} - \alpha_1 e^{\beta_1 x}.$$

Parametrit γ_1, γ_2 lasketaan kaavan 4.9 mukaisesti.

4. Iterointi lopetetaan, kun T_{kaikki} on asettunut haluttuun arvoonsa ja suureen

T_{nelio} arvo vakiintuu tai lähtee kasvuun.

Iteroinnista saadun sovituksen käyttökelpoisuutta tulee arvioida. Arviointia auttaa, jos iterointi suoritetaan useampaan kertaan eri päätyvyyksin. Löydetyistä ratkaisuista valitaan se, jossa suure T_{nelio} on pienin.

4.4 Raaka laskenta

Edellä esitetty iterointimenetelmä antaa aineistolle z-parametrit. Iterointi ei kuitenkaan varmista, onko löydetty sovitus optimaalisin mahdollinen. Tämän arvioimiseksi z-parametrien avaruudesta voidaan tehdä pääoma-arvoylijäämän laskentaa mahdollisimman monin eri parametrikombinaatioin. Näin voidaan kokeilla, löytyisikö parametriavaruudesta iterointitulosta laadukkaampia ratkaisuja.

Edellä kuvattua *raakaa laskentaa* tehdään mahdollisimman monella eri parametrikombinaatiolla. Kombinaatioiden valinta vaatii laskijan omaa harkintaa. Parametrikombinaatioiden valintaa rajoittaa käytettävissä olevan tietokoneen laskentatehot.

5 Sovitusharjoitus

Seuraava sovitusharjoitus on tehty luvussa 4 esitetyllä iterointimenetelmällä. Aineisto on saatu työeläkeyhtiöiltä.

5.1 Aineisto

Sovitusharjoituksen aineisto on koottu työeläkeyhtiöiden tuottamista rahastoitujen etuuksien tiedoista. Työeläkeyhtiöiden osuus työntekijän eläkelain mukaisen vakuutuksen tunnettujen työkyvyttömyyseläkkeiden vastuuvelasta oli vuonna 2018 noin 97 prosenttia koko työntekijän eläkelain mukaisesta vakuutusmaksusta. Alla olevassa taulukossa on tilastotietoa työeläkkeiden työkyvyttömyysetuuksista sekä sovitusaineistosta laskettuja vertailulukuja. Sovitusaineistossa ei ole mukana sellaisia lyhytaikaisia työkyvyttömyysetuuksia, joista ei lasketa vastuuvelkaa.

Työeläkeyhtiöiden tuottaman aineiston lisäksi Eläketurvakeskuksen välitilastorekistereistä muodostettiin vaihtoehtoinen sovitusaineisto. Siinä nykyperusteiden mukainen pääoma-arvoylijäämä jäi tilastotietoja korkeammiksi. Ero johtui erityisesti siitä, että välitilastorekisterien aineistoon ei saatu luotettavasti lisättyä työkyvyttömyyseläkkeelle palaavia tapauksia.

Työeläkeyhtiöt kokosivat aineiston vuosilta 2016 - 2019. Aineistot yhdistettiin Eläketurvakeskuksessa ja siitä laskettiin voimassa olevien laskuperusteiden (erityisperusteet 2020 ja yleisperusteet 2018) mukaiset pääoma-arvoylijäämät. Laskettuja ylijäämiä verrattiin työeläkeyhtiöiden vuosien 2016 - 2019 tilinpäätösanalyysien mukaisiin työkyvyttömyyseläkkeiden pääoma-arvoylijäämiin.

Seuraavassa taulukossa on esitetty sekä tilastojen mukaiset että aineistosta lasketut vuotuiset yli työeläkeyhtiöiden summatut vastuuvelat ja pääoma-arvoylijäämät.

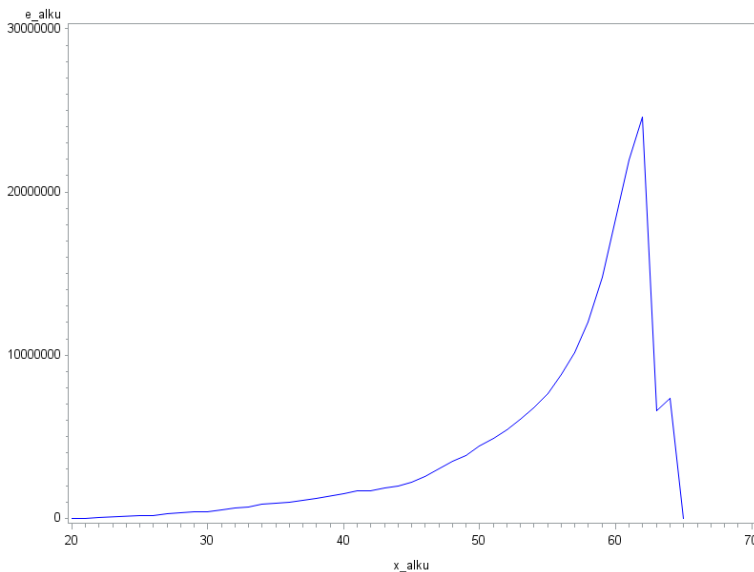
Suure	Tilasto	Aineisto
pääoma-arvoylijäämä 2019	53 M €	57 M €
vastuuelka 31.12.2018	3,05 MRD €	2,95 MRD €
pääoma-arvoylijäämä 2018	35 M €	49 M €
vastuuelka 31.12.2017	3,05 MRD €	3,05 MRD €
pääoma-arvoylijäämä 2017	50 M €	57 M €
vastuuelka 31.12.2016	3,19 MRD €	3,19 MRD €
pääoma-arvoylijäämä 2016	79 M €	87 M €
vastuuelka 31.12.2015	3,36 MRD €	3,36 MRD €

Aineistosta laskettu nykyisten laskuperusteiden mukainen vuoden alun vastuuelkojen summa on yhteensä 12,6 miljardia euroa ja pääoma-arvoylijäämien summa on yhteensä 250 miljoonaa euroa. Aineiston pääoma-arvoylijäämien summa on tilastoihin verrattuna yhteensä noin 30 miljoonaa euroa suurempi.

Aineiston vuoden alun kuukausitasoinen rahastoitujen etuuksien summa ns. *kanta* on 0,19 miljardia euroa. Kuvissa 5.1 ja 5.2 on esitetty kannan jakautumista iän ja työkyvyttömyyden keston suhteen.

Kuvio 5.1.

Aineiston kanta iän suhteen.

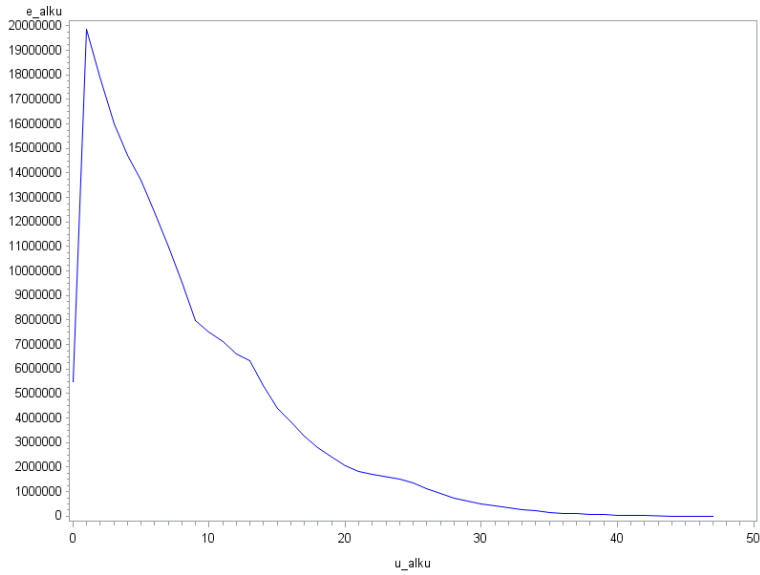


Sovitusaineistosta laskettiin kaavan 4.5 mukainen vuotuisen kannan päätyvyys iän x ja keston u mukaan. Kuvissa 5.3 ja 5.4 on esitetty kannan päätyvyys iän ja

työkyyttömyyden keston suhteen.

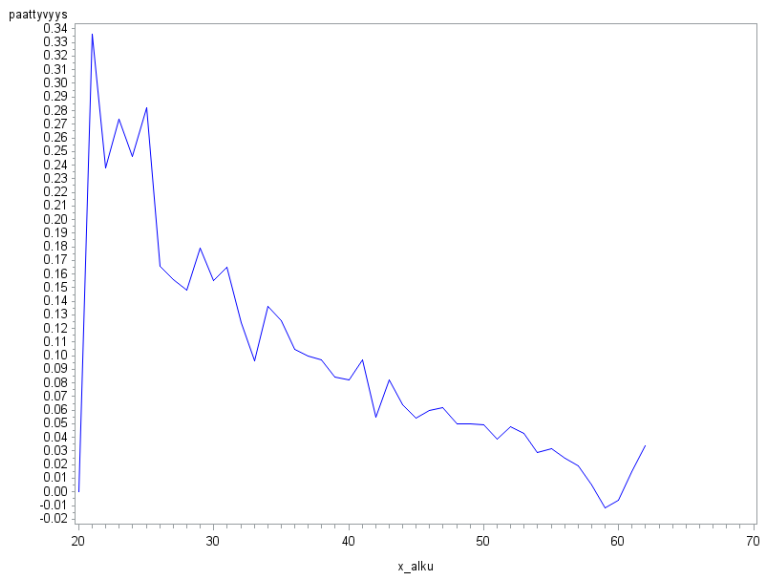
Kuvio 5.2.

Aineiston kanta keston suhteen.



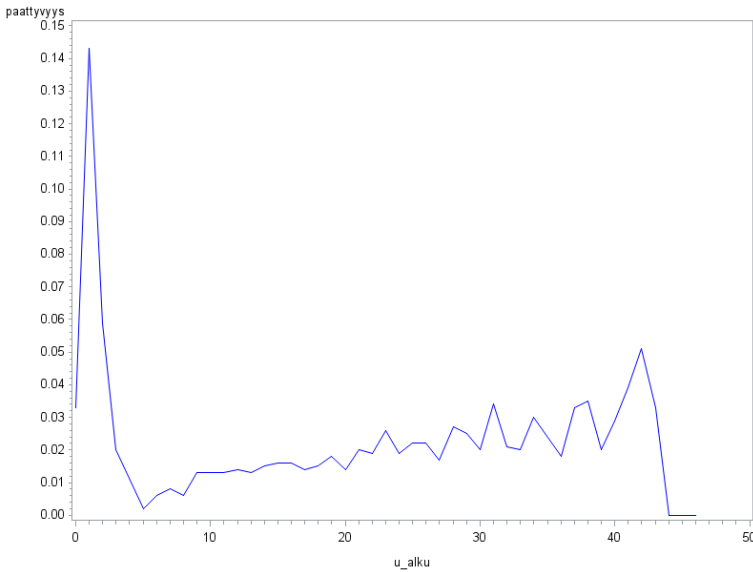
Kuvio 5.3.

Aineiston päätyvyys iän suhteen.



Kuvio 5.4.

Aineiston päätyvyys keston suhteen.



Sovitusharjoituksessa käytettiin työkyvyttömyysalkavuutena Eläketurvakeskuksessa rahoitusennusteita varten koottua vuoden 2018 alkavuustilastoa. Se kuvaa rahastoitujen etuuksien mukaista alkavuutta. Kuvassa 5.16 on esitetty sekä tilastoalkavuus että sovitusharjoituksen ratkaisun 5.1 mukainen alkavuus.

5.2 Iterointi

Aineistolle tehtiin liitteessä A esitetyn SAS-koodin mukainen sovituksen iterointi. Laskennassa käytettiin nykyisten laskuperusteiden (erityisperusteet 2020) mukaista 3 prosentin korkoa. Parametrien iterointia tehtiin eri eksponenttijakaumin ja askelluksin. Löydetyistä ratkaisuisista valittiin seuraava.

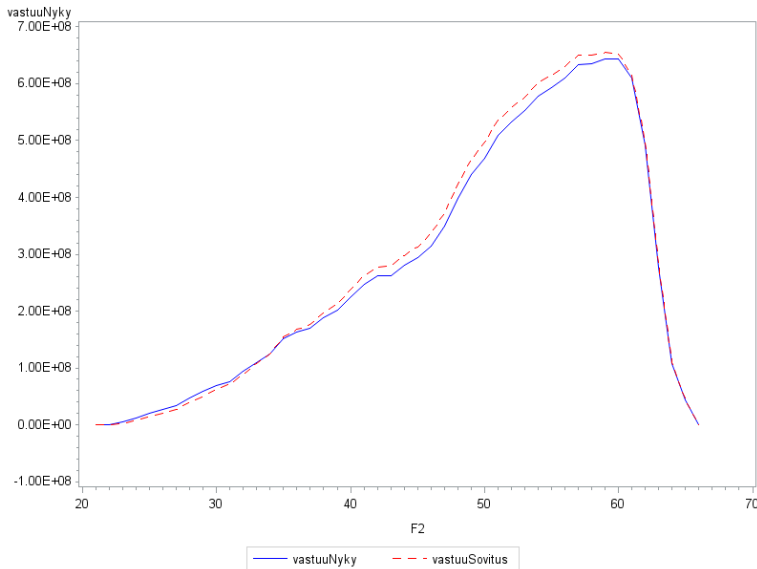
$$\begin{aligned}
 (5.1) \quad \alpha_1 &= 0,000299 \\
 \alpha_2 &= 0,000006 \\
 \beta_1 &= 0,0397 \\
 \beta_2 &= 0,1214 \\
 \gamma_1 &= 0,8730 \\
 \gamma_2 &= 0,1264
 \end{aligned}$$

Esitettyyn ratkaisuun sisältyy pyöristyksiä. Parametrien iteroinnissa tarkkuutena käytettiin kahdeksaa desimaalia. Lopputuloksen tarkkuustaso haettiin kokeilemalla pääoma-arvoylijäämän herkkyyttä eri pyöristyksin.

Aineistolle laskettu vuoden alun vastuuvelan summa on esitetyn sovituksen mukaan laskettuna 13,0 miljardia euroa. Se on 0,4 miljardia euroa eli noin 3 prosenttia enemmän, kun nykyperusteiden mukaan laskettu vastuuvelan summa. Kuvissa 5.5 ja 5.6 on esitetty vastuiden jakautumista iän ja työkyvyttömyyden keston mukaan sekä nykyisillä laskuperusteilla että sovituksella laskettuna.

Kuvio 5.5.

Aineiston vastuuvetä iän suhteen sekä nykyperusteilla että sovituksen mukaan laskettuna.



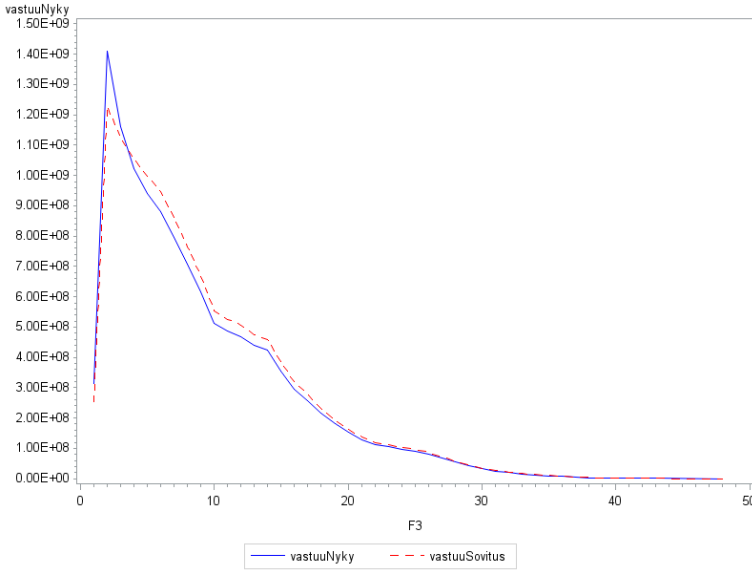
5.2.1 Sovituksen pääoma-arvoylijäämä

Sovituksessa aineistosta lasketun pääoma-arvoylijäämän tavoitteeksi $T_{tavoite}$ asetettiin 60 miljoonaan euroon. Tuosta 30 miljoonaa euroa tuli aineiston ja tilastojen välisestä erosta ja toinen 30 miljoonaa euroa turvaavuudesta. Turvaavuus määrättiin seuraavasti.

Pääoma-arvoylijäämän vuotuiseksi turvaavuustasoksi asetettiin 75 prosenttia. Pääoma-arvoylijäämän vuotuisen satunnaisuuden oletettiin noudattavan normaali jakaumaa. Vuosien 2009 - 2019 toteutuneista pääoma-arvoylijäämistä laskettu vuotuinen keskihajonta on noin 10 miljoonaa euroa, joten neljän vuoden aineistolle pääoma-arvoylijäämän turvaavuustasoksi saadaan $4 \cdot 0,7 \cdot 10$ miljoonaa euroa

Kuvio 5.6.

Aineiston vastuovelka keston suhteen sekä nykyperusteilla että sovituksen mukaan lasketuna



eli 30 miljoonaa euroa.

Kuvissa 5.7 ja 5.8 on esitetty pääoma-arvoylijäämän jakautumista iän ja työkyvyttömyyden keston mukaan sekä nykyperusteilla että sovituksella laskettuna.

Kuvista nähdään sovituksen ja nykyperusteiden välinen ylijäämän tason lasku. Sovituksessa ylijäämä jakaantuu myös tasaisemmin. Erityisesti työkyvyttömyyden keston suhteen havaitaan tasaantumista. Nykyinen laskuperuste tuottaa lyhyissä työkyvyttömyyksissä merkittävää ylijäämää ja pitemmissä taas alijäämää. Se aiheuttaa epätasapainoa tariffoinnin ja vastuuvelan purkautumisen suhteen.

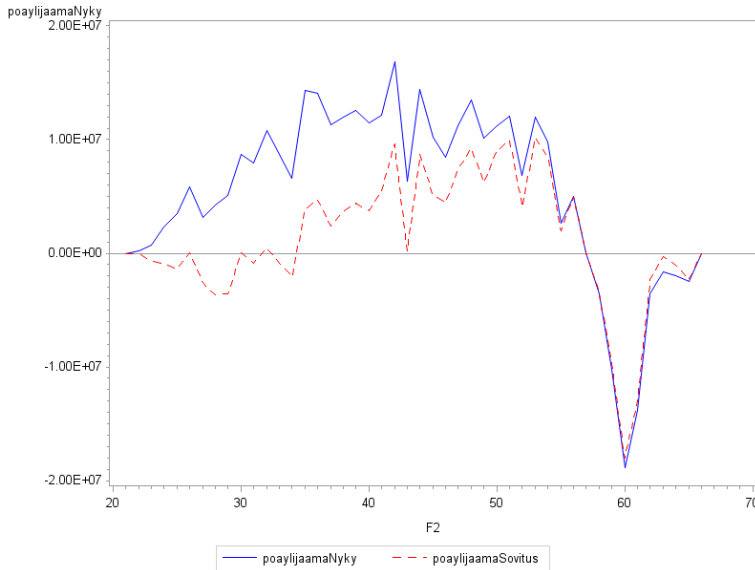
5.2.2 Iteroinnin kulku

Iterointi löytää tavoitellun 60 miljoonan euron pääoma-arvoylijäämä vähin askelluksin. Ylijäämän jakaantumista voidaan kuitenkin siinä vaiheessa vielä tasoittaa, joten askellusta jatketaan, kunnes ylijäämäsuureiden 4.10 neliösumma T_{nelio} saavuttaa alimman tason. Kuvissa 5.9 - 5.15 on esitetty sovituksen 5.1 iteroinnin kulkua.

Iteroinnin ratkaisu saavutetaan noin 1300 askelluksen kohdalla. Tuon jälkeen

Kuvio 5.7.

Aineiston pääoma-arvoylijäämä iän suhteen sekä nykyperustein että sovituksen mukaan laskettuna.



iteroinnin askellus jää ns. luuppiin.

Iterointia tehtiin tässä työssä eri aineistoihin ja eri iterointiparametrein. Toisinaan iteroinnit jäivät ratkaisun kohdalla luuppiin. Toisinaan iteroitavien parametrien arvot jatkoivat ratkaisun jälkeen kulkuaan siten, että neliösumman T_{nelio} arvo kääntyi kasvuun. Jälkimmäistä kulkua on hieman havaittavissa kuvien iteroinnissa, mutta ratkaisu valittiin tässä kuitenkin ns. luuppivaiheen jälkeen.

Iteroinnin alussa lyhyiden ja pitkien työkyvyttömyystyyppien alkavuudet asetetaan yhtä suuriksi. Kuvissa 5.16 ja 5.17 esitetään löydetyn ratkaisun alkavuusoledukset.

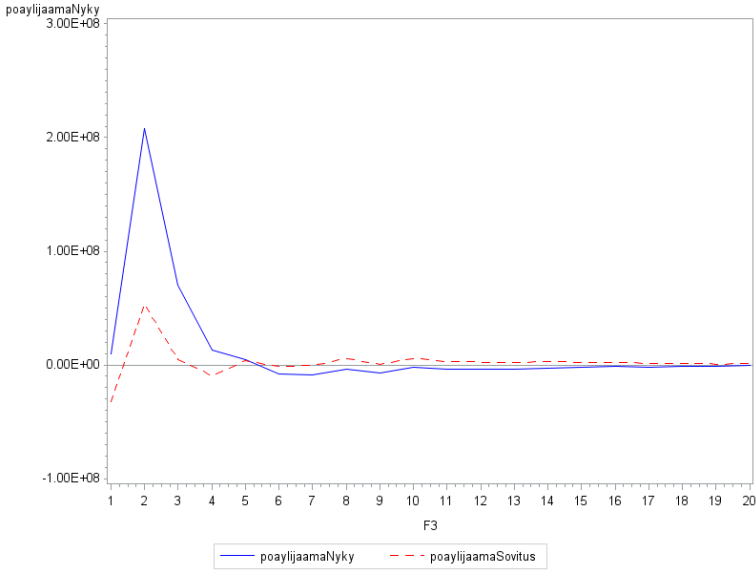
5.2.3 Iterointiparametrit

Kohdassa 4.3.1 kuvataan iteroinnin kiinnityksiä. Sovituksen 5.1 iteroinnissa kiinnityksiin tehtiin seuraavia havaintoja.

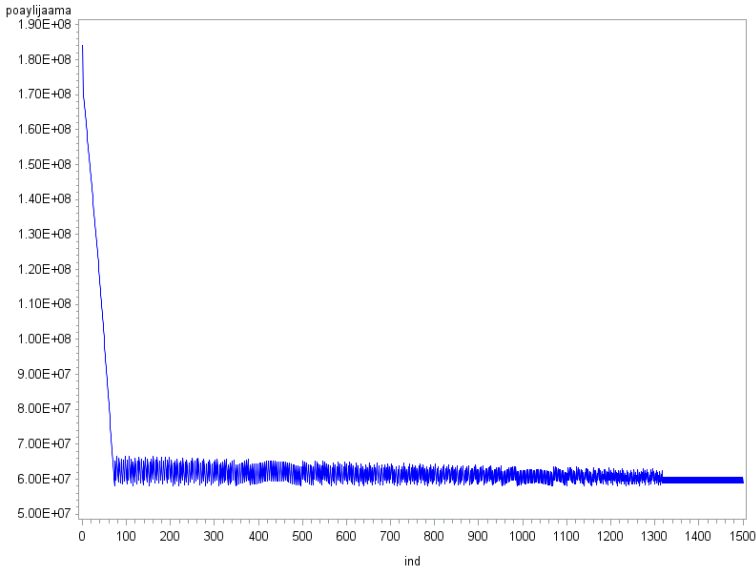
Nykyisten laskuperusteiden sovituksessa työkyvyttömyystyyppäjä on kolme. Esi-tetyssä sovituksessa työkyvyttömyystyyppäjä on vain kaksi. Tässä harjoituksessa kokeiltiin myös iterointeja, jossa ns. keskipitkien työkyvyttömyystyyppien ($j = 3$

Kuvio 5.8.

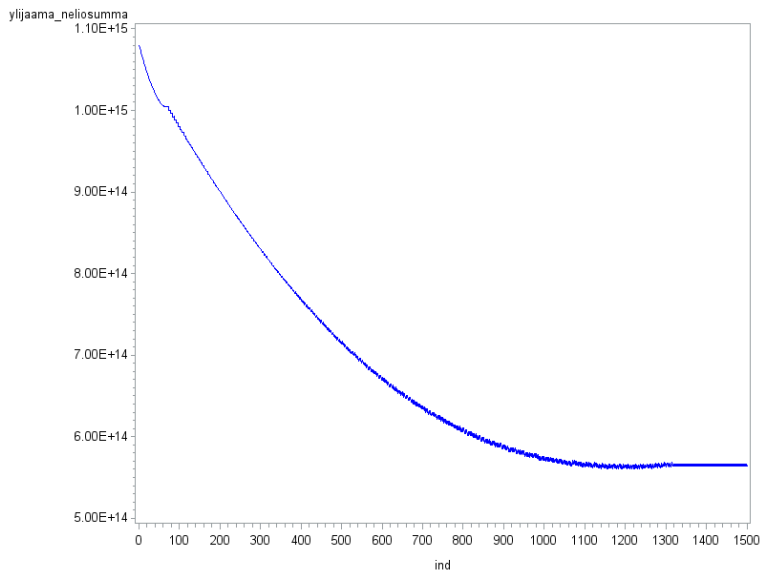
Aineiston pääoma-arvoylijäämä keston suhteen sekä nykyperustein että sovituksen mukaan laskettuna.

**Kuvio 5.9.**

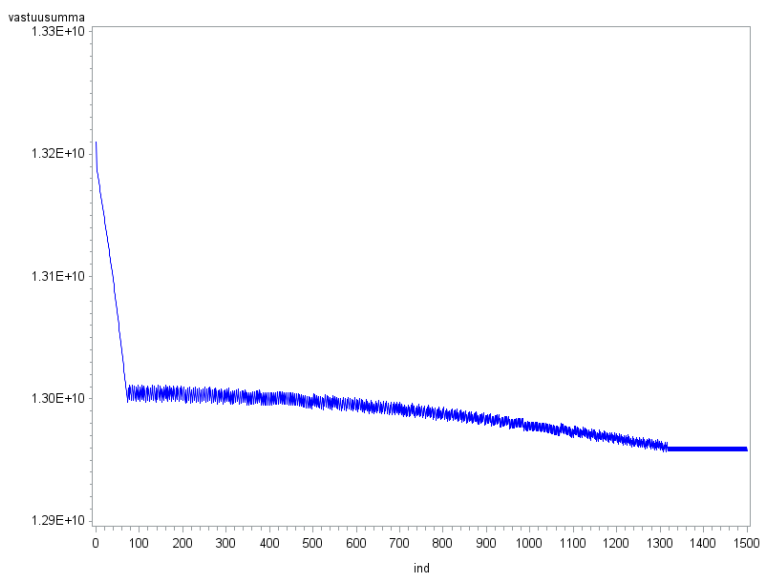
Pääoma-arvoylijäämä T_{kaikki} eri iterointikerroilla.

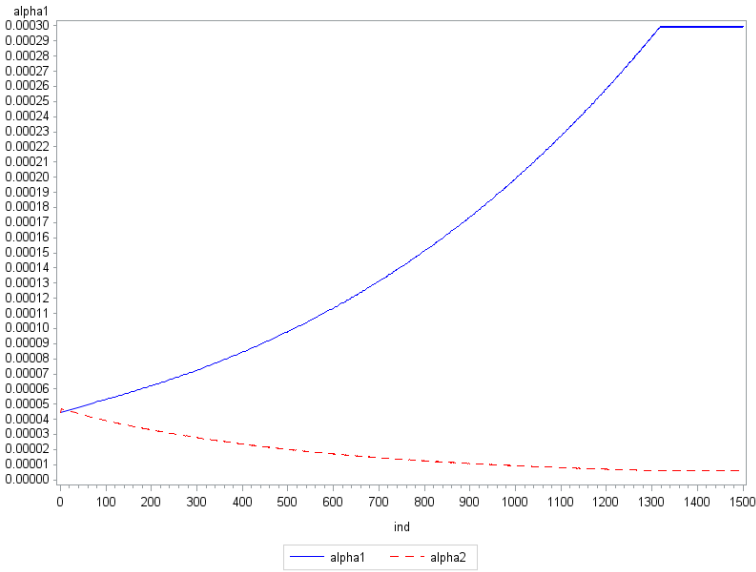
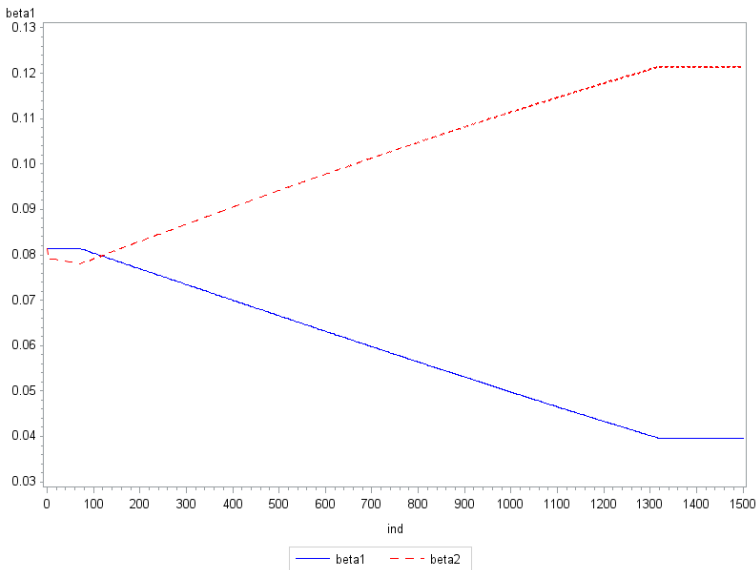


Kuvio 5.10.
Neliösumma T_{nelio} eri iterointikerroilla.



Kuvio 5.11.
Vuoden alun vastuovelka eri iterointikerroilla.



Kuvio 5.12.Parametrien α_i arvot eri iterointikerroilla.**Kuvio 5.13.**Parametrien β_i arvot eri iterointikerroilla.

Kuvio 5.14.

Pääoma-arvoylijäämä iän suhteen sekä sovituksessa että iterointikerran 86 mukaan laskettuna.



ja $\lambda_3^{-1} = 20$) parametrit α_3 ja β_3 olivat mukana kiinnitetyin arvoin. Kokeiluja tehtiin eri kiinnityksin.

Alkavuusparametrien arvoilla $\alpha_3 = 0,0001$ ja $\beta_3 = 0,001$ iterointiratkaisun neliösumma T_{nelio} vastasi ratkaisun 5.1 neliösummaa. Suuremmilla alkavuuksilla neliösummiksi saatiin korkeampia arvoja, joten keskipitkän työkyvyttömyystyyppin mukaan ottaminen ei tässä sovittamisessa anna lisäarvoa.

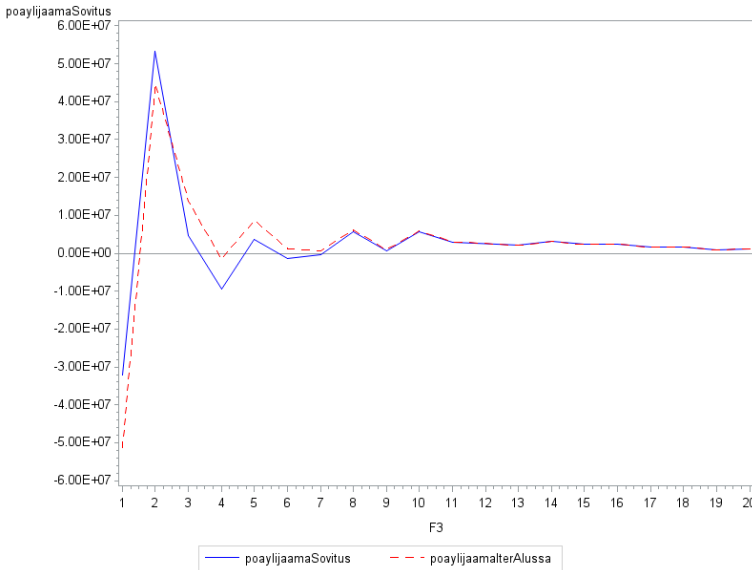
Työkyvyttömyystyyppien päättyvyyksien valinnalla on vaikutusta neliösumman arvoon. Tämän työn ensimmäiset iteroinnit tehtiin eksponenttijakaumien parametreilla $\lambda_1^{-1} = 1$ ja $\lambda_2^{-1} = 100$. Suorittamalla iterointeja eri päättyvyysiksi havaittiin, että lyhyissä tyypeissä parametriarvo $\lambda_1^{-1} = 1,2$ johtaa pienimpään neliösummaa. Pitkissä työkyvyttömyystyypeissä iterointien neliösumma aleni, kun kesto λ_2^{-1} kasvatettiin. Alenema oli kuitenkin merkityksetön sen jälkeen, kun kesto λ_2^{-1} ylitti arvon 200.

Seuraavassa taulukossa on esitetty eri päättyvyyksillä tehtyjen iterointien tuloksia.

λ_1^{-1}	λ_2^{-1}	$T_{nelio}(10^{14} \text{ euroa}^2)$
1	50	7,8
1	100	6,4
1	200	5,8
1	300	5,8
0,5	200	11,0
1,1	200	5,7
1,2	200	5,7
1,3	200	5,7
1,4	200	5,8
1,5	200	5,9

Kuvio 5.15.

Pääoma-arvoylijäämä keston suhteen sekä sovituksessa että iterointikerran 86 mukaan laskettuna.

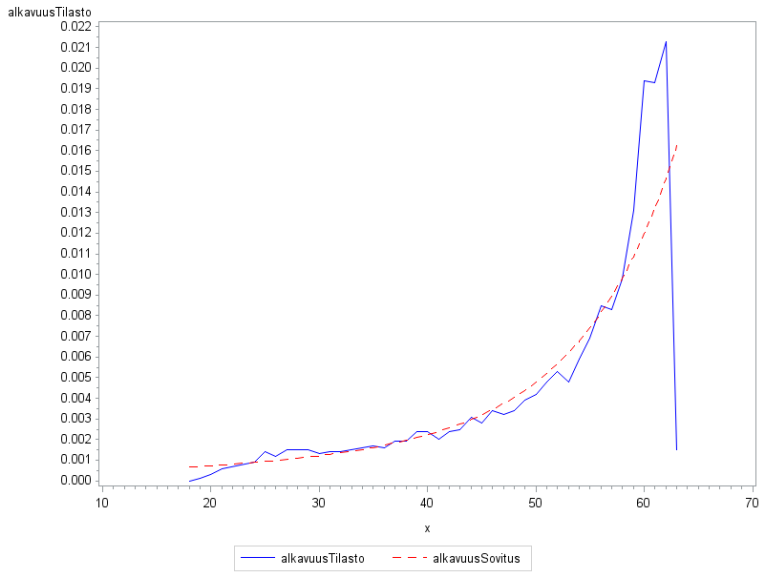


Esitetystä sovituksesta pitkien kestoparametriksi on asetettu 200. Siten pitkien tyyppien vuotuinen päättyvyys on sovituksessa noin 0,5 prosenttia. Se alittaa pääosin kuvan 5.4 mukaisen päättyvyyden, joten sovituksen pääoma-arvoylijäämä jää positiiviseksi myös pitkäkestoisten työkyvyttömyyksien tapauksissa. Nykypöytäkirjoituksen mukainen sovitusta tekee lievää tappiota noissa tapauksissa.

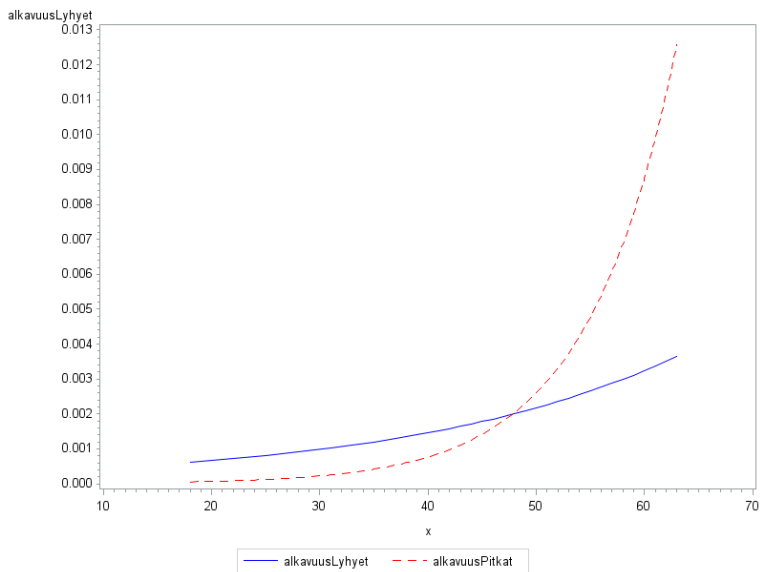
Iteroinnin askelluksen kertoimeksi asetettiin lopullisessa iteroinnissa $h_{iter} = 0,002$. Mitä pienemmäksi kertoimen arvo asetettiin, sitä lähemmäksi ratkaisua

Kuvio 5.16.

Työkyvyttömyysalkavuus iän suhteen tilastossa ja sovituksessa.

**Kuvio 5.17.**

Lyhyiden ja pitkien työkyvyttömyystyyppien alkavuudet sovituksessa.



iterointi jäi luuppiin. Toisaalta, sitä enemmän iterointikertoja tarvittiin ratkaisun saavuttamiseen. Eri iterointikokeiluissa kertoimen arvoksi asetettiin $h_{iter} = 0,004$. Siten iteroinnin laskenta vei vähemmän aikaa. Pääoma-arvoylijäämän T_{kaikki} arvo jäi iterointikokeiluissa luuppiin 60 ± 3 miljoonan euron ympärille. Kyseinen tarkkuus riitti arvioimaan eri kiinnitysten merkitystä.

Ikärajaparametri x_{jako} asetettiin arvoon 45. Se antoi alemman neliösumman ratkaisulle, kuin esim. arvot 40 tai 50. Iteroinnin tulos jakaa pääoma-arvoylijäämän tasan ikävälkien kesken.

5.3 Raaka laskenta

Työeläkeyhtiöiden aineistosta tehtiin raakaa laskentaa. Laskenta vahvisti oletusta, että iteroinnin tuottamien ratkaisujen lisäksi ei ole löydettävissä selkeästi parempia sovituksia.

Raa'assa laskennassa aineistolle laskettiin pääoma-arvoylijäämän summasuureet T_{kaikki} ja T_{nelio} parametriarvojen

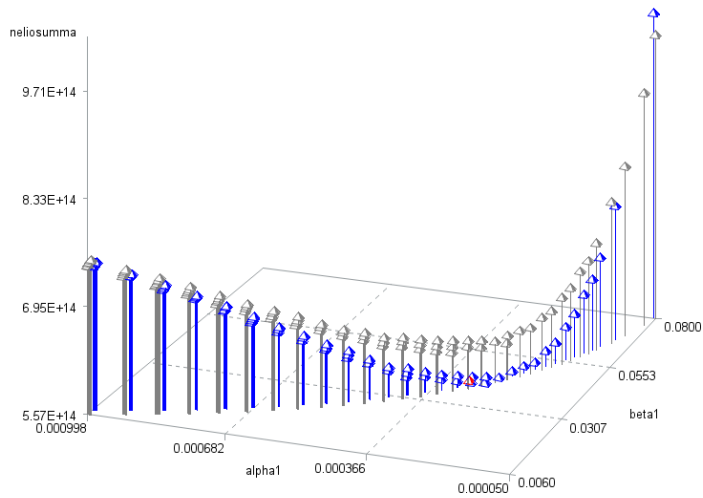
$$(5.2) \quad \begin{aligned} \alpha_1 &\in \{n_\alpha \cdot 0,000002 \mid n_\alpha = 0, 1, \dots, 500\} \\ \beta_1 &\in \{n_\beta \cdot 0,002 \mid n_\beta = 0, 1, \dots, 500\} \\ \lambda_1^{-1} &= 1, 2 \\ \lambda_2^{-1} &\in \{100, 200\} \end{aligned}$$

kombinaatiosta ns. *parametriverkosta*. Verkon jokaisessa pisteessä parametrien α_2, β_2 arvot määrättiin pienimmän neliösumman menetelmällä kaavan 4.7 mukaisesti ja parametrien γ_1, γ_2 arvot kaavojen 4.9 mukaisesti.

Laskennan tuloksista valittiin ne, joissa $T_{kaikki} = 60 \pm 5$ miljoonaa euroa ja $T_{nelio} < 10^{15}$ euroa². Kuvassa 5.18 esitetään valitut tulokset. Kuvaan on lisätty punaisella iteroinnin antama sovitus 5.1. Sen ympärillä neliösumma saa matalimmat arvot.

Kuvio 5.18.

Raa'an laskennan tuloksia. Sinisissä pisteissä parametri $\lambda_2^{-1} = 200$ ja harmaissa $\lambda_2^{-1} = 100$. Punaisessa pisteessä on iteroinnin sovitus 5.1.



6 Muista malleista

Tässä harjoitustyössä keskityttiin z-mallin parametrien sovittamiseen. Muita työkyvyttömyysmalleja on pohdittu Mikko Karpojan SHV-työssä (Karpoja 1998). Seuraavassa on eräs näkökulma työkyvyttömyyden päättävyyden mallintamiseen.

Z-mallin tavoitteena on, että sen analyttisiä lausekkeita voidaan soveltaa kaikkien henki- ja eläkevakuutustoimintaa. Malli toteuttaa tämän tavoitteen hyvin, mutta tarkkuustasossa joudutaan tyytymään karkealle tasolle. Luvun 5 sovitusharjoituksessa alkaneiden eläkkeiden pääoma-arvoylijäämää ei saatu jaettu aivan tasaisesti eri summariveille. Tasaisuutta voidaan lisätä esimerkiksi jakamalla kuntoutustuet ja toistaiseksi myönnetyt työkyvyttömyyseläkkeet omiin sovituksiin, mutta se ei poista z-mallin oletuksiin sisältyviä rajoituksia. Esimerkiksi kuvassa 5.4 havaitaan päättävyyden kasvua työkyvyttömyyden keston kasvaessa. Ilmiö ei vastaa z-mallin sekoitusluonnetta, jossa lyhyempien työkyvyttömyystyyppien osuus vähenee keston kasvaessa.

Työeläkeyhtiöiden aineistosta laskettiin myös kaavan 4.5 mukaisin päättävyyksin johdettuja pääoma-arvokertoimia ns. *havaittuja pääoma-arvokertoimia*

$$(6.1) \quad A_{hav}(x, u, w) = \sum_{(t,s) \in \{(x,u), \dots, (w-1, u+w-x-1)\}} (1 + i_0)^{x-t-1/2} \mu_{t,s}^{\text{jatkuu}},$$

missä

$$(6.2) \quad \mu_{t,s}^{\text{jatkuu}} = \prod_{(y,r) \in \{(x,u), \dots, (t,s)\}} (1 - \mu_{(y,r)}^{\text{paattvyys}})$$

ja $\mu_{(y,r)}^{\text{paattvyys}}$ on kaavan 4.5 mukainen päättvyys joukolle

$$\{i \in \Gamma \mid x = y \text{ ja } u = r\}.$$

Havaittujen pääoma-arvokertoimien laskentaa häiritsi puuttuvat päättvyyshavainnot. Päättvyyskäsiä täydennettiin eri menetelmin laskennan loppuun saattamiseksi.

Eräs vaihtoehtoinen tapa määrittää alkaneiden työkyvyttömyyseläkkeiden

pääoma-arvokertoimet on mallintaa päättyvyyksiä $\mu_{(y,r)}^{\text{paattvyys}}$ jollakin sovituk-
sella ja laskea pääoma-arvokertoimet kaavalla 6.1. Sovituksena voisi esimerkiksi
käyttää iän ja työkyvyttömyyden keston mukaista polynomia. Tuon laskuharjoi-
tuksen tekeminen jätetään kuitenkin tässä tekemättä. Se ei sisälly työn otsikon
alle.

7 Johtopäätökset

Työkyvyttömyyttä on vaikea ennakoida. Työkyvyttömyyteen vaikuttavat monet asiat ja niiden kokonaisvaltainen mallintaminen on käytännössä mahdotonta. Alkavuus on alentunut vuosikymmenien aikana merkittävästi. Työkyvyttömyyden syyt ovat muuttuneet ja kuntoutusta on lisätty. Vaikea ennakoitavuus ei kuitenkaan tarkoita, etteikö työkyvyttömyyttä kyetä järkevästi vakuuttamaan. Vakuutettavan henkilökunnan on vain oltava riittävän suuri ja työkyvyttömyyden mallintamisessa on keskityttävä olennaisiin asioihin. Mallinnusta on kyettävä päivittämään riittävän usein.

Z-malli on otettu työeläkejärjestelmässä käyttöön sen alusta alkaen. Malli perustuu yksinkertaisiin oletuksiin ja on looginen kokonaisuus. Sen parametrisointi on moniulotteista ja siten mallin sovittamiseen sisältää valinnanvaikeutta. Parametrien moniulotteisuus lienee yksi syy, miksi z-mallin sovitus ei ole tehty työeläkejärjestelmässä vuosikymmeniin. Myös sovitusaineiston muodostamisessa ja käsittelyssä on omat vaikeutensa.

Tämän työn iterointisovituksessa edellä kuvatut vaikeudet on pyritty selättämään. Iteroinnissa käytetään yksinkertaisia menetelmiä ja se perustuu z-mallin rakenteeseen. Iterointisovituksessa ei tavoitella optimaalisinta ratkaisua vaan riittää, että löydetty sovitus toimii käytännössä. Sovitus voidaan suoraviivaisesti päivittää tarpeen mukaan uusimpiin havaintoihin. Siihen tarvittavat ohjelmakoodit ovat olemassa ja käytettävissä. Ohjelmakoodeja voi tarvittaessa myös hyödyntää työkyvyttömyyden ja pääoma-arvolyijäämän seurannassa.

Luvussa 6 esitellään vaihtoehtoinen, havaintoihin perustuva menetelmä alkaneen eläkkeen pääoma-arvojen laskennalle. Sen luonne perustuu tietokoneiden laskentatehon hyödyntämiseen ja se mallintaa olemassa olevaa aineistoa tarkemmin. Malli lienee laajennettavissa myös vastaisiin työkyvyttömyyksiin, mutta se ei ole kokonaisuutena yhtä elegantti kuin z-malli.

Tämä sovitusharjoitus osoittaa, että työeläkejärjestelmän nykyisten laskuperusteiden z-parametrit eivät vastaa havaintoja. Alkaneiden työkyvyttömyyseläkkeiden pääoma-arvolyijäämä on vuosittain noin 50 miljoonaa euroa ja se muodostuu käytännössä muutaman vuoden kestoisista tapauksista. Parametrit olisi tarpeen päivittää, jotta tariffointi ja vastuovelka toimitivat loogisena kokonaisuutena. Sovitus 5.1 tarjoaa tähän yhden vaihtoehdon. Siinä vuotuinen pääoma-arvolyijäämä

alenisi keskimäärin arviolta vajaaseen 10 miljoonaan euroon ja ylijäämän jakautuminen iän ja keston suhteen olisi tasaisempaa. Lisäksi on suositeltavaa, että vuosittaista työkyvyttömyysetuuksien pääoma-arvoylijäämän seurantaa lisätään. Tämä työ tarjoaa myös siihen työvälineitä.

LÄHTEET

Erityisperusteet EU-eläkesiirtolaista vuonna 2020.

Gauffin, E. 1981. Työkyvyttömyysmalleista. SHV-harjoitustyö.

Karpoja, M. 1998. TEL-työkyvyttömyyteen liittyvät todennäköisyydet ja niiden mallittaminen. SHV-harjoitustyö.

Kiviniemi, M. 2019. Työeläkkeiden rahoitus vuonna 2018. Eläketurvakeskuksen tilastoja 15/2019.

Lahti, S. & Toro, S. 2018. Pääoma-arvokertoimet. Eläketurvakeskuksen käsikirjoja 01/2018.

Laskuperustemalli 1962. Sosiaali- ja terveysministeriö 12.7.1962.

Lehtovirta, M. 2020. Lakisääteisen työeläkevakuutuksen vakuutustekniikkaa. Eläketurvakeskuksen käsikirjoja 01/2020.

Mäkinen, H. 2018. Työeläkkeiden kustannustenjako. Eläketurvakeskuksen käsikirjoja 02/2018.

Rantala, J. & Hietaniemi, M. & Laaksonen, M. & Kuivalainen, S. & Nyman, H. 2017. Työkyvyttömyyseläkkeensaajien eläketurva ja toimeentulo 2000-luvulla. Eläketurvakeskuksen tutkimuksia 04/2017.

Ryynänen, E. & Kujanpää, J. & Kaipainen-Perttula, E. 2015. Yksityisalojen työeläkkeiden lisäeläketurva. Eläketurvakeskuksen käsikirjoja 01/2015.

Tuomikoski, J. 1986. TEL:n työkyvyttömyysmalli: Z-pinnan parametrin määrittäminen pinnansovitustehtävänä. SHV-harjoitustyö.

Työntekijäin eläkelain mukaisen lisäeläkevakuutuksen ja työnantajan eläkevakuutuksen erityisperusteet vuonna 2016.

Työntekijän eläkelain mukaisen eläkevakuutuksen erityisperusteet vuonna 2020.

Työntekijän eläkelain mukaisen eläkevakuutuksen yleiset laskuperusteet vuonna 2018. Sosiaali- ja terveysministeriö vahvistanut 28.11.2017.

Työryhmäraportti työkyvyttömyyseläkkeen ja ansiotulojen yhteensovittamisesta sekä lineaarisesta mallista. Sosiaali- ja terveysministeriön raportteja ja muistioita 2017:32.

LIITTEET

Liite A Ohjelmakoodi

Tämän harjoitustyön laskenta on toteutettu SAS:lla. Seuraavassa on kohdan 5.2 laskennassa käytetty ohjelmakoodi.

```
/* ETK, Jaakko Aho, 21.5.2020 Tama SAS-koodi perustuu
    vuonna 2019
ETK:ssa Jarno Variksen ja Jaakko Ahon yhdessä tekemiin
iterointeihin. */

/*(1) lahtodata alku*/

libname polku "\\..."; /*tassa ei tehdä lajikasittelyä
, niita
tehtiin ETK:ssa vuonna 2019*/ proc sql;
    CREATE TABLE alkavuudet AS
        SELECT
            ika as x,
            alkavuus AS alkavuus
        FROM
            polku.alkavuudet
    ;
quit;
proc sql;
    CREATE TABLE summat AS
        SELECT
            x,
            u,
            w,
            sum(e_alku) as e_alku ,
            sum(e_loppu) as e_loppu ,
            sum(m) as m
        FROM
            polku.data_shv2016to2019
```

```
GROUP BY
        x,
        u,
        w
; quit; /*(1) lahtodata loppu*/

/*(2) iteroinnin alustusta alku*/

/* iteroinnin parametrit */
%let alkavuudet_alaika = 30;
%let alkavuudet_ylaika = 62;
%let vastuut_alaika=15;
%let vastuut_ylaika=70;
%let vastuut_keskika=45; /* esim. 40 - 50 */

%let iter_lkm = 1500; /* esim. 100 - 3 000 */ %let
    iter_askel =
0.002; /* esim. 0.001 - 0.01 */ %let ylijaama_tavoite
    =60*10**6; /* 30 M
euroa datan vaaristymasta ja 30 M euroa 75 %:n
turvaavuudesta */

%let kesto1 = 1.2; /* esim. 0.5 - 3.0 */
%let kesto2 = 200; /* esim. 50 - 300 */
%let kesto3 = 20; /* esim. 10 - 30 */

%let round_ln_alkavuus = 0.0001;
%let round_iter_parametrit = 0.00000001;

%global alpha1 alpha2 alpha3
        beta1 beta2 beta3
        gamma1 gamma2 gamma3
        ylijaama_alku ylijaama_loppu
        ylijaama_neliosumma vastuu_summa
;
%let alpha3 = 0; /* esim. 0 - 0.0005 */
%let beta3 = 0; /* esim. 0 - 0.001 */

/*(2) iteroinnin alustusta loppu*/
```

```
/*(3) aineiston tsekkaus alku*/

/* kuvaajien asetukset */
goptions reset=all border cback=white htitle=12pt
      htext=10pt;
symbol1 interpol=join color=blue;
symbol2 interpol=join color=red;
symbol3 interpol=join color=gray;
symbol4 interpol=join color=yellow;
symbol5 interpol=join color=green;
legend1 label=none frame;

/* kannan tarkastelua kuvaajien kautta */
title1 "Kanta";
proc sql;
      CREATE TABLE kanta_x AS
      SELECT
            x-1 as x_alku ,
            sum(e_alku) as e_alku
      FROM
            summat
      GROUP BY
            x_alku
      ;
quit;
proc sql;
      CREATE TABLE kanta_u AS
      SELECT
            u-1 as u_alku ,
            sum(e_alku) as e_alku
      FROM
            summat
      GROUP BY
            u_alku
      ;
quit;
proc sql;
      CREATE TABLE kanta_xu AS
```

```

SELECT
    x-1 as x_alku ,
    u-1 as u_alku ,
    sum(e_alku) as e_alku
FROM
    summat
GROUP BY
    x_alku ,
    u_alku
;
quit;
proc gplot data=kanta_x;
    plot e_alku * x_alku;
run;
proc gplot data=kanta_u;
    plot e_alku * u_alku;
run;
proc g3d data=kanta_xu;
    plot x_alku*u_alku=e_alku /
        rotate=30;
run;

/* paattyyvyyksien tarkastelua kuvaajien kautta */
title1
"Paattyyvyys"; proc sql;
    CREATE TABLE paattyyvyys_x AS
        SELECT
            x-1 as x_alku ,
            round(1 - sum(e_loppu)/sum(
                e_alku),0.001) as
                paattyyvyys
        FROM
            summat
        WHERE
            x < w-1
        GROUP BY
            x_alku
;
quit;

```



```

proc sql;
    CREATE TABLE paattyvyys_u AS
        SELECT
            u-1 as u_alku ,
            round(1 - sum(e_loppu)/sum(
                e_alku),0.001) as
                paattyvyys
        FROM
            summat
        WHERE
            x < w-1
        GROUP BY
            u_alku
    ;
quit;
proc sql;
    CREATE TABLE paattyvyys_xu AS
        SELECT
            x-1 as x_alku ,
            u-1 as u_alku ,
            round(1 - sum(e_loppu)/sum(
                e_alku),0.001) as
                paattyvyys
        FROM
            summat
        WHERE
            x < w-1
        GROUP BY
            x_alku ,
            u_alku
    ; quit; /* karsitaan yksittaiset voimakkaat
        piikit pois
kuvasta*/ data paattyvyys_xu;
    set paattyvyys_xu;

    if paattyvyys lt -0.1 then delete;
    if paattyvyys gt 0.8 then delete;
run;
proc gplot data=paattyvyys_x;

```

```
    plot paattyyvyys * x_alku;
run;
proc gplot data=paattyyvyys_u;
    plot paattyyvyys * u_alku;
run;
proc g3d data=paattyyvyys_xu;
    plot x_alku*u_alku=paattyyvyys /
        rotate=200;
run;

/*(3) aineiston tsekkaus loppu*/

/*(4) parametrien haku alku*/

/*(4.1) Parametrien lahtoarvot alkavuuksien
    sovituksesta*/ data
alkavuudet_tmp;
    set alkavuudet;

    alpha3=symgetn('alpha3 ');
    beta3=symgetn('beta3 ');
    ln_alkavuus = log(max(alkavuus - alpha3 * exp(
        beta3 * x),&round_ln_alkavuus.));

    if x < &alkavuudet_alaika. or x > &
        alkavuudet_ylaika. then delete;
    keep x alkavuus ln_alkavuus;
run;
proc reg data= alkavuudet_tmp outest=param_alkavuus
    noprint;
    model ln_alkavuus = x;
run;
data param_alkavuus;
    set param_alkavuus;
    id = 1;
    alpha = max(round(exp(Intercept),&
        round_iter_parametrit.),&
        round_iter_parametrit.);
```

```

        beta = round(x,&round_iter_parametrit.);
run;
proc sql noprint;
    SELECT
        alpha format=17.10,
        beta format=17.10
    INTO
        :alpha ,
        :beta
    FROM
        param_alkavuus
    ;
quit;
%let alpha1=%sysevalf(&alpha. * 0.5);
%let alpha2=%sysevalf(&alpha. * 0.5);
%let beta1=&beta.;
%let beta2=&beta.;

/*(4.2) iteroinnissa tarvittavat makrot*/

/* vastuulaskennan makro*/
/* alkuv: 1, jos vuoden alun vastuu ja 0, jos vuoden
    lopun vastuu*/
%macro vastuulaskenta(alkuv, rahe, poa, vastuu);
    gamma1 = round(beta1 + 1/kesto1, &
        round_iter_parametrit.);
    gamma2 = round(beta2 + 1/kesto2, &
        round_iter_parametrit.);
    gamma3 = round(beta3 + 1/kesto3, &
        round_iter_parametrit.);
    delta=log(1.03);
    x_poa = x + 0.5 - &alkuv.;
    u_poa = u + 0.5 - &alkuv.;
    poa1 = (1 - exp(-(gamma1-beta1+delta)*(w-x_poa
        )))/(gamma1-beta1+delta);
    poa2 = (1 - exp(-(gamma2-beta2+delta)*(w-x_poa
        )))/(gamma2-beta2+delta);
    poa3 = (1 - exp(-(gamma3-beta3+delta)*(w-x_poa
        )))/(gamma3-beta3+delta);

```

```

        z1= alpha1*exp(beta1*x_poa-gamma1*u_poa);
        z2= alpha2*exp(beta2*x_poa-gamma2*u_poa);
        z3= alpha3*exp(beta3*x_poa-gamma3*u_poa);
        z = z1+z2+z3;
        &poa. = (z1*poa1+z2*poa2+z3*poa3)/z;
        &vastuu. = &poa. * &rahe. * 12;
%mend vastuulaskenta;

/* iteraation makro */ %macro iteraatio(); /*1)
    lasketaan vastuut
    ennen parametrien saatoa*/ data vastuut;
        set summat;
        where x ge &vastuut_alaika. and x le &
            vastuut_ylaika.;

        alpha1 = symgetn('alpha1');
        alpha2 = symgetn('alpha2');
        alpha3 = symgetn('alpha3');
        beta1 = symgetn('beta1');
        beta2 = symgetn('beta2');
        beta3 = symgetn('beta3');
        kesto1 = symgetn('kesto1');
        kesto2 = symgetn('kesto2');
        kesto3 = symgetn('kesto3');
        /* vuoden alun vastuu */
        %vastuulaskenta(1, e_alku, poa_alku,
            vastuu_alku);
        /* vuoden lopun vastuu */
        %vastuulaskenta(0, e_loppu, poa_loppu,
            vastuu_loppu);
        /* paaoma-arvoylijamaa */
        poaylijaama = sum(1.03**(0.5)*vastuu_alku, - m
            , - 1.03**(-0.5)*vastuu_loppu);
run;

/*2) otetaan vastuulaskennan tulokset talteen*/
proc sql noprint;
    /* ylijaama_loppu */
    SELECT

```

```
        sum(poaylijaama) format=17.2
    INTO
        :ylijaama_loppu
    FROM
        vastuut
    WHERE
        x ge &vastuut_keskika.
;
/* ylijaama_alku */
SELECT
        sum(poaylijaama) format=17.2
    INTO
        :ylijaama_alku
    FROM
        vastuut
    WHERE
        x lt &vastuut_keskika.
;
/* ylijaama_neliosumma */
SELECT
        sum(poaylijaama ** 2) format=17.2
    INTO
        :ylijaama_neliosumma
    FROM
        vastuut
;
/* vastuu_summa */
SELECT
        sum(vastuu_alku) format=17.2
    INTO
        :vastuu_summa
    FROM
        vastuut
;

/* 3) saadetaan lyhyiden parametreja tuloksen mukaan
*/ data
_null_ ;
        alpha1 = symgetn('alpha1');
```

```
beta1 = symgetn('beta1');
ylijaama_alku = symgetn('ylijaama_alku') - %
    sysevalf(&ylijaama_tavoite . / 2);
ylijaama_loppu = symgetn('ylijaama_loppu') - %
    sysevalf(&ylijaama_tavoite . / 2);
mittari = sum(ylijaama_loppu , ylijaama_alku);

/* jos tulee ylijaamaa , niin kasvatetaan
lyhyiden painoa ja pain vastoin
alpassa prosenttuaalinen muutos
betan kautta vastaava muutos alkavuuteen 40
vuotiailla*/
if mittari gt 0 then do;
    if ylijaama_alku gt ylijaama_loppu then do;
        alpha1=alpha1 * (1 + &iter_askel.);
    end;
    else do;
        beta1=beta1 * (1 + &iter_askel.);
    end;
end;
else do;
    if ylijaama_alku lt ylijaama_loppu then do;
        alpha1=alpha1 * (1 - &iter_askel.);
    end;
    else do;
        beta1=beta1 * (1 - &iter_askel.);
    end;
end;

/*pyoristys ja muuttujien tallennus*/
alpha1 = round(alpha1,&round_iter_parametrit.)
;
beta1 = round(beta1,&round_iter_parametrit.);
call symput('alpha1' , alpha1);
call symput('beta1' , beta1);

run ;

/* 4) sovitetaan pitkien parametrin alkavuuksien
mukaan*/
```

```
data alkavuudet_tmp;
    set alkavuudet;
    alpha1=symgetn('alpha1');
    beta1=symgetn('beta1');
    alpha3=symgetn('alpha3');
    beta3=symgetn('beta3');
    ln_alkavuus = log(max(alkavuus - alpha1 * exp(
        beta1 * x) - alpha3 * exp(beta3 * x),&
        round_ln_alkavuus.));
    if x < &alkavuudet_alaika. or x > &
        alkavuudet_ylaika. then delete;
    keep x ln_alkavuus;
run;
proc reg data= alkavuudet_tmp outest=param_alkavuus
    noprint;
    model ln_alkavuus = x;
run;
data param_alkavuus;
    set param_alkavuus;
    alpha2 = max(exp(Intercept),&
        round_iter_parametrit.);
    beta2 = max(x,&round_iter_parametrit.);

    /* pyoristys ja muuttujien tallennus */
    alpha2 = round(alpha2,&round_iter_parametrit.);
    ;
    beta2 = round(beta2,&round_iter_parametrit.);
    call symput('alpha2', alpha2);
    call symput('beta2', beta2);
run;

/* 5) otetaan iteraation tulos talteen */
data _null_;
    call symput('tulos', symgetn('
        yljaama_neliosumma'));
run;

%mend iteraatio;
```

```
/*funktio varsinaisen parameterihaun data-steppiin*/
proc fcmp outlib = work.funktiot.poa;
    function poa();
        rc = run_macro('iteraatio', tulos);
        return(tulos);
    endsub;
run;
options cmlib = work.Funktiot;
```

```
/*(4.3) parameterihaun data-steppi*/
data tulos;
    /*eka kasittely*/
    ind = 1;
    alpha1=symgetn('alpha1');
    alpha2=symgetn('alpha2');
    alpha3=symgetn('alpha3');
    beta1=symgetn('beta1');
    beta2=symgetn('beta2');
    beta3=symgetn('beta3');
    kesto1=symgetn('kesto1');
    kesto2=symgetn('kesto2');
    kesto3=symgetn('kesto3');
    ylijaama_neliosumma=poa();
    ylijaama_alku = symgetn('ylijaama_alku');
    ylijaama_loppu = symgetn('ylijaama_loppu');
    poaylijaama = sum(ylijaama_alku ,
        ylijaama_loppu);
    vastuusumma = symgetn('vastuu_summa');
    output;
    ind = ind + 1;

    /*silmukka*/
    do while(ind le &iter_lkm.);
        alpha1=symgetn('alpha1');
        alpha2=symgetn('alpha2');
        alpha3=symgetn('alpha3');
        beta1=symgetn('beta1');
        beta2=symgetn('beta2');
        beta3=symgetn('beta3');
```



```
kesto1=symgetn('kesto1');
kesto2=symgetn('kesto2');
kesto3=symgetn('kesto3');

ylijaama_neliosumma = poa();
ylijaama_alku = symgetn('ylijaama_alku
');
ylijaama_loppu = symgetn('
ylijaama_loppu');
poaylijaama = sum(ylijaama_alku ,
ylijaama_loppu);
vastuusumma = symgetn('vastuu_summa');
output;
ind = ind + 1;
end;
run;

/*(4) parametrien haku loppu*/

/*(5) tulosten tarkastelu alku*/

/* alkavuudet */
title1 "Alkavuudet tulos";
data alk_tulos;
set alkavuudet;
alpha1=symgetn('alpha1');
beta1=symgetn('beta1');

alpha2=symgetn('alpha2');
beta2=symgetn('beta2');

alpha3=symgetn('alpha3');
beta3=symgetn('beta3');

alk1 = alpha1 * exp(beta1 * x);
alk2 = alpha2 * exp(beta2 * x);
alk3 = alpha3 * exp(beta3 * x);
alk_sov = alk1 + alk2 + alk3;
run;
```

```
proc gplot data=alk_tulos ;
    plot (alkavuus alk_sov)*x / overlay legend=legend1 ;
run ; /* poa-ylijaama */ title1 "Paaoma-arvoylijaama
    tulos" ; proc
sql ;
    SELECT
        sum(poaylijaama) as poaylijaama
    FROM
        vastuut
    ;
quit ;
proc sql ;
    CREATE TABLE tulos_poa_ika AS
    SELECT
        x ,
        sum(poaylijaama) as
        poaylijaama
    FROM
        vastuut
    GROUP BY
        x
    ;
quit ;
proc sql ;
    CREATE TABLE tulos_poa_kesto AS
    SELECT
        u ,
        sum(poaylijaama) as
        poaylijaama
    FROM
        vastuut
    GROUP BY
        u
    ;
quit ;
proc gplot data=tulos_poa_ika ;
    plot poaylijaama * x ;
run ;
proc gplot data=tulos_poa_kesto ;
```

```
        plot poaylijaama * u;
run;
proc g3d data=vastuut;
    plot x*u=poaylijaama/
        rotate=30;
run;
proc gplot data=tulos;
    plot poaylijaama * ind;
run; title1 "Paaoma-arvoylijaamien neliosumma eri
    iteroineissa";
proc gplot data=tulos;
    plot ylijaama_neliosumma * ind;
run;
title1 "Vuoden alun vastuiden summa eri iteroinneissa
    ";
proc gplot data=tulos;
    plot vastuusumma * ind;
run;
title1 "alphan eri iteroinneissa";
proc gplot data=tulos;
    plot (alpha1 alpha2)*ind / overlay legend=legend1;
run;
title1 "betan eri iteroinneissa";
proc gplot data=tulos;
    plot (beta1 beta2)*ind / overlay legend=legend1;
run;
/* poistetaan kuvaajien datat*/
proc sql noprint;
    DROP TABLE alk_tulos;
    DROP TABLE tulos_poa_ika;
    DROP TABLE tulos_poa_kesto;
    DROP TABLE paattyvyys_ika;
    DROP TABLE paattyvyys_kesto;
quit;

title1 "Parametrit tulos";
proc sql;

        SELECT

                ind as ind_iter ,
```

```
        poaylijaama ,
        ylijaama_neliosumma as
            neliosumma ,
        alpha1 ,
        alpha2 ,
        alpha3 ,
        beta1 ,
        beta2 ,
        beta3 ,
        round(beta1 + 1 / kesto1 , &
            round_iter_parametrit.) as
            gamma1 ,
        round(beta2 + 1 / kesto2 , &
            round_iter_parametrit.) as
            gamma2 ,
        round(beta3 + 1 / kesto3 , &
            round_iter_parametrit.) as
            gamma3 ,
        kesto1 ,
        kesto2 ,
        kesto3 ,
        &vastuut_keskika. as keskika ,
        &iter_askel. as askel
FROM
        tulos
WHERE
        ind ge &iter_lkm -2.
;
quit;

/*(5) tulosten tarkastelu loppu*/
```




ELÄKETURVAKESKUKSEN
KÄSIKIRJOJA

Työkyvyttömyyseläkkeiden z-mallin sovittaminen

Työkyvyttömyysetuuksien vakuutustekninen laskenta on toteutettu työeläkejärjestelmässä niin sanotun z-mallin avulla. Mallin parametrit on sovitettu aineistoon viimeksi vuonna 1986. Tässä työssä esitetään käyttökelpoinen sovitusmenetelmä parametrien sovittamiselle. Lisäksi työssä esitetään vuosien 2016–2019 aineistoon perustuva sovitusharjoitus.

ELÄKETURVAKESKUKSEN KÄSIKIRJOJA

Eläketurvakeskus on lakisääteinen työeläketurvan kehittäjä, asiantuntija ja yhteisten palvelujen tuottaja. Käsikirjoja-sarjassa julkaistaan oppaita ja hakuteoksia työeläketurvan toimeenpanoon ja asiantuntijoille.



Eläketurvakeskus
PENSIONSSKYDDSCENTRALEN