

07/2011

ELÄKETURVAKESKUKSEN KESKUSTELUALOITTEITA

Sijoitusriskien mallintaminen kahteen sekoitettuun normaalijakaumaan perustuvalla stokastisella sijoitustuottomallilla

Kasimir Kaliva



Eläketurvakeskus
PENSIONSSKYDDSCENTRALEN

Eläketurvakeskus

00065 ELÄKETURVAKESKUS

Puhelin: 010 7511

Sähköposti: etunimi.sukunimi@etk.fi

Finnish Centre for Pensions

FI-00065 ELÄKETURVAKESKUS, FINLAND

Telephone +358 10 7511

E-mail: firstname.surname@etk.fi

Pensionsskyddscentralen

00065 PENSIONSSKYDDSCENTRALEN

Telefon: 010 7511

E-post: förnamn.efternamn@etk.fi

Helsinki 2011

ISSN-L 1795-3103

ISSN 1797-3635 (verkkójulkaisu)

ABSTRAKTI

Tässä raportissa esitellään eläkejärjestelmän kestävyysarviointiin tarkoitettu sijoitustuotantomalli, joka koostuu kuudesta muuttujasta: inflaatio, lyhyt korko, pitkä korko, osaketuotto, kiinteistötuotto ja hedge-rahastojen tuotto. Mallissa osaketuottojen ehdollisena jakaumana käytettiin kahden normaalijakauman sekoitusjakaumaa, mikä huomioi suurten pörssiromahdusten mahdollisuuden paremmin kuin tavanomainen normaali- tai log-normaalijakauma. Simuloidun jakauman 0,5 prosentin kvantiilipiste on -17,4 prosenttia. Vähintään yhtä huonoja tuottoja tapahtuu siis simuloitien perusteella kerran 200 vuodessa.

ABSTRACT

In this report, we present a return-on-investment model intended for the assessment of the pension system's sustainability. The model comprises six variables: inflation, short-term interest rate, long-term interest rate, share profit, real estate profit and hedge fund profit. A mixed distribution of two normal distributions was used in the model for the conditional distribution of share profits. The mixed distribution takes into account the possibility of major stock exchange crashes more successfully than does a regular normal or log-normal distribution. The 0.5 per cent quantile of the simulated distribution is -17.4 per cent. In other words, based on the simulations, equally poor returns occur once in 200 years at a minimum.

CONTENTS

1 Johdanto	5
2 Pörssiromahdukset ja niiden mallintaminen	6
3 Stokastinen malli	9
3.1 Yleistä.....	9
3.2 Inflaatio.....	9
3.3 Korot.....	9
3.4 Kiinteistötuotot.....	11
3.5 Osaketuotot.....	12
3.6 Hedge-rahastot.....	14
4 Simuloinnit	16
5 Yhteenveto	18
Liitteet	19
Liite A: Aineisto.....	19
Liite B: Osaketuotot.....	20
Lähteet	23

1 Johdanto

Tässä raportissa esitellään eläkejärjestelmän kestävyysarviointiin tarkoitettu sijoitustuottomalli. Havainnollisen esimerkin sijoitusriskin vaikutuksesta työeläkejärjestelmän kannalta tarjoaa vuoden 2008 finanssikriisi, jonka seurauksena pörssikurssit romahtivat maailmanlaajuisesti. Vuoden 2008 finanssikriisillä on luonnollisesti ollut merkittävä vaikutus eläkelaitosten vakavaraisuuteen.

Stokastinen sijoitustuottomalli koostuu kuudesta muuttujasta: inflaatio, lyhyt korko, pitkä korko, osaketuotto, kiinteistötuotto ja hedge-rahastojen tuotto. Malli on laajennus ETK:n aikaisemmasta sijoitustuottomallista (Risku & Kaliva 2009). Aikaisemmasta poiketen mallissa on huomioitu kiinteistötuotot ja hedge-rahastot uusina sijoitusluokkina.

Toinen keskeinen ero aikaisempaan malliin on suurten pörssiromahdusten huomioiminen. Aikaisempi malli perustui olettamukseen että osaketuotot ovat log-normaalisti jakautuneita. Log-normaalisuusolettamukseen perustuvat mallit kuitenkin selvästi aliarvioivat erittäin huonojen sijoitustuottojen mahdollisuutta. Esimerkiksi vähintään yhtä huonojen tuottojen todennäköisyys kun mitä toteutui vuonna 2008 Yhdysvaltojen markkinoilla on log-normaalisuusoletuksen perusteella 1/1180. Tällaisia tapahtumia pitäisi siis tapahtua harvemmin kuin kerran tuhannessa vuodessa. Todellisuudessa niitä on esiintynyt selvästi useammin.

Pörssiromahduksille ei ole löydetty yleisesti hyväksyttyä tieteellistä selitystä. Myös siitä, kuinka niitä pitää tilastollisesti mallintaa, ei löydy yksimielisyyttä. Tässä raportissa logaritmisten osaketuottojen ehdollisena jakaumana käytettiin kahden normaalijakauman sekoitusjakaumaa. Sekoituskäytön ehdollisena jakaumana puoltavat helppokäyttöisyys ja tulkinnallisuus. Tämä malli voidaan tulkita siten, että osaketuottoihin vaikuttavat epäsäännölliset informaatiohäviöt.

Malli estimoitiin käyttämällä Saksan aineistoa. Lisäksi estimoituja parametreja kalibroitiin vastaamaan paremmin näkemyksiämme ja aikaisemmissa tutkimuksissa esitettyjä näkemyksiä sijoitustuottojen ja inflaation kehityksestä. Kiinteistötuottojen osalta malli perustuu aikaisemmissa tutkimuksissa esitettyihin malleihin ja empiirisiin tuloksiin.

Raportti on rakennettu seuraavasti. Luvussa 2 keskustellaan pörssiromahduksista ja niiden mallintamisesta. Luvussa 3 esitellään sijoitustuottomalli. Luvussa 4 käsitellään mallin antamia simulaatiotuloksia. Luku 5 sisältää yhteenvedon ja johtopäätökset.

2 Pörssiromahdukset ja niiden mallintaminen

Yksinkertainen log-normaalijakauma soveltuu huonosti vuoden 2008 kaltaisten huonojen osaketuottojen mallintamiseen. Log-normaalisuusmallin epärealistisuus tulee vielä selkeämmin esille tarkasteltaessa neljännesvuosiaineistoa. Log-normaalia jakaumaa sovitettiin S & P 500 -indeksin neljännesvuosidatalle ajanjaksolle 1871–2008. Vuoden 2008 viimeisellä neljänneksellä S & P 500 -indeksin reaalityttö oli -24,3 prosenttia. Log-normaalisuusoletuksen mukaan todennäköisyys vähintään yhtä huonolle tuotolle on 0,04 prosenttia. Vähintään yhtä huonoja tuottoja pitäisi esiintyä kerran 625 vuodessa. Vuoden 2008 viimeisen neljänneksen tuotto ei kuitenkaan ole läheskään huonoin Yhdysvaltain historiassa. Vuodesta 1871 lähtien löytyy viisi tätä huonompaa vuosineljänneistä. Kaikkein huonoin vuosineljännes oli vuoden 1932 toinen neljännes, jolloin reaalityttö oli -38,5 prosenttia. Näin huonoja vuosineljänneksiä pitäisi log-normaalien jakauman mukaan esiintyä kerran 44 miljoonassa vuodessa.

Osaketuottoihin liittyvä paksuhäntäisyys on aikaisemmin hyvin tiedetty empiirinen tosiasia. Kaaosteorian kehittäjänä tunnettu Benoit Mandelbrot (1963) havaitsi, että erittäin hyviä ja huonoja tuottoja esiintyy huomattavasti enemmän osakemarkkinoilla kuin normaalijakauman perusteella voisi ennustaa. Sijoitustuotot ovat myös negatiivisesti vinoja (ks. esim. Chen ym. 2001). Toisin sanoen hyvin suuret negatiiviset tuotot ovat yleisempiä kuin hyvin suuret positiiviset tuotot.

Osaketuottojen epäsymmetriseen käyttäytymiseen ei ole esitetty mitään yleisesti hyväksyttyä tieteellistä selitystä. Chen ym. (2001) ovat käsitelleet eri selityksiä havaitulle negatiiviselle vinoudelle. Yhden selityksen mukaan osaketuottojen negatiivinen vinous johtuu nk. vipuvaikutuksesta (*leverage effect*) (Black 1976). Tämän teorian mukaan kurssilasku vähentää oman pääoman osuutta yritysten markkina-arvossa ja tätä kautta kasvattaa osaketuottojen vaihtelua eli volaliteettia.

Toisen selityksen mukaan negatiivinen vinous perustuu nk. *volatility feedback* -mekanismiin (Pindyck 1984). Suuret positiiviset uutiset kasvattavat osakkeiden tuotto-odotusta mutta samalla kasvattavat tuottoihin liittyvää epävarmuutta. Koska sijoittajat ovat keskimäärin riskiä karttavia, epävarmuuden kasvu vaimentaa korkeimmista kasvuodotuksista johtuvaa kurssinousua. Suurten negatiivisten uutisten kohdalla epävarmuuden kasvun vaikutus on taas samansuuntainen kuin kasvuodotuksilla.

Kolmannen selityksen mukaan negatiivinen vinous on selitettävissä osakekuponien olemassaololla. Rationaalisia malleja osakekuponille ovat esittäneet esim. Blanchard & Watson (1982). Brunnermeier (2001) on taas käsitellyt kirjassaan epäsymmetriseen informaatioon ja laumakäyttäytymiseen perustuvia selityksiä kuponille. Näiden selitysten mukaan rationaalisten toimijoiden mahdollisuus tehdä arbitraasivoittoa irrationaalisesta käyttäytymisestä johtuvista hinnoitteluvirheistä on rajallinen muun muassa lyhyen sijoitushorisontin vuoksi. Historiallisen kuvauksen kupaista ja niitä seuraavista romahduksista on esittänyt Kindelberger (2005).

Neljännän selityksen mukaan vinous johtuu sijoittajien heterogeenisyydestä ja lyhyeksi

myynti -rajoitteista (Chen ym. 2001)¹. Lyhyeksi myynti -rajoitteiden seurauksena pessimististen sijoittajien näkemys osakemarkkinoista ei heijastu täysimääräisenä osakkeiden hintoihin. Pessimistien käytössä oleva piilotettu informaatio tulee tämän selityksen mukaan esille vasta kurssien laskiessa.

Myöskään siitä, kuinka ei-(log)normaaleja tuottoja pitäisi tilastollisesti mallintaa, ei valitse tieteellistä yksimielisyyttä. Yksinkertaisuuden ja selkeyden vuoksi tässä esityksessä keskitytään lineaarisiin malleihin, joiden ehdollinen varianssi on ajan suhteen vakio. Kuten tunnettua tilastollisen mallin virhetermien ei-normaalisuus voi olla myös seurausta ehdollisesta heteroskedastisuudesta tai epälineaarisuudesta. Ehdollisen heteroskedastisuuden mallintamiseen käytetyistä ARCH/GARCH -malleista ja niiden yleistyksistä kattavan esityksen on kirjoittanut Engle (1995).

Mandelbrot (1963) käytti osaketuottojen mallintamisessa ei-normaalijakautuneita α -stabiileja jakaumia, joiden varianssi on ääretön. Soveltaessa α -stabiileja jakaumia osaketuottojen mallintamiseen ongelmaksi muodostuu se, että tällöin myös kumuloitujen log-tuottojen raja-jakauma on paksuhäntäinen jakauma, jonka varianssi on ääretön.

Toinen tapa mallintaa ei-normaaleja osaketuottoja on käyttää ehdollisena jakaumana studentin t-jakaumaa tai sen epäsymmetrisiä yleistyksiä (ks. esim. Theodossiou 1998). Myös eksponentiaalista potenssijakaumaa (*exponential power distribution*) ja sen epäsymmetrisiä yleistyksiä voidaan käyttää osaketuottojen mallintamisessa. Komunjer (2007) on soveltanut osaketuottojen mallintamisessa nk. epäsymmetristä potenssijakaumaa (*asymmetric power distribution*), joka on vinouden huomioiva yleistys eksponentiaalisesta potenssijakaumasta.

Neljäs tapa mallintaa ei-normaaleja logaritmisia tuottoja on käyttää kahden normaalijakauman sekoitusjakaumaa. Logaritmiset osaketuotot noudattavat tämän mallin mukaan todennäköisyydellä $1 - p$ normaalijakaumaa odotusarvolla μ_1 ja varianssilla σ_1^2 sekä todennäköisyydellä p normaalijakaumaa odotusarvolla μ_2 ja varianssilla σ_2^2 . Tämän jakauman tiheysfunktio pisteessä x on muotoa

$$(1 - p)\phi(x, \mu_1, \sigma_1^2) + p\phi(x, \mu_2, \sigma_2^2),$$

$$\text{jossa } \phi(x, \mu, \sigma^2) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left\{-\frac{(x - \mu)^2}{2\sigma^2}\right\}$$

on normaalijakauman tiheysfunktio odotusarvolla μ ja varianssilla σ^2 . Sekoitusjakauman neljä ensimmäistä momenttia on esitetty liitteessä B.

Ajatus normaalijakaumien sekajakauman käyttämisestä osaketuottojen mallintamisessa on peräisin Konilta (1984). Hänen esittämänsä tulkinnan mukaan toinen normaalijakauma kuvastaa informaatio-signaalin vaikutusta. Informaatio-signaalit lisäävät osaketuottoihin liittyvää epävarmuutta, jonka vuoksi toisen normaalijakauman varianssi on suurempi kuin vähäisen informaation tilaa kuvaavan normaalijakauman.

Oletetaan, että $\sigma_2^2 > \sigma_1^2$. Tällöin muuttuja X , joka noudattaa kahden normaalijakauman sekoitusjakaumaa, voidaan esittää toisistaan riippumattomien muuttujien U , Z ja V funktio-

¹ Lyhyeksi myynti tarkoittaa sopimusta, jossa henkilö joka ei vielä omista osaketta, sitoutuu toimittamaan osakkeen ostajalle tulevaisuudessa ennalta sovittuun hintaan. Lyhyeksi myyjä siis myy osakkeen, jota ei vielä omista.

na muodossa $X = U + Z * V$. Muuttuja U noudattaa normaalijakaumaa odotusarvolla μ_1 ja varianssilla σ_1^2 . Kaksiarvoinen muuttuja Z taas noudattaa bernoulli-jakaumaa todennäköisyydellä p . Shokkimuuttuja V taas noudattaa normaalijakaumaa odotusarvolla $\mu_2 - \mu_1$ ja varianssilla $\sigma_2^2 - \sigma_1^2$.

Silloin kuin informaatio-signaalia kuvaavan normaalijakauman odotusarvo on matalampi kuin vähäisen informaation tilaa kuvaavan normaalijakauman, saadaan osaketuottoaikasarjoille tyypillistä negatiivista vinoutta. Selitys sille, miksi informaatio-signaalin vaikutus osakekursseihin on useammin negatiivinen kuin positiivinen, löytyvät yllä esitetyistä teorioista.

Tässä raportissa käytetään sekoitusjakaumamallia osaketuottojen ehdollisena jakaumana. Sekoitusjakauma valittiin, koska sille löytyy luonteva tulkinta ja osittain siksi, että se on helposti hallittavissa.

3 Stokastinen malli²

3.1 Yleistä

Sijoitustuottomalli on estimoitu Saksan ja Yhdysvaltain aineiston perusteella. Estimoinnissa tarvittavat aikasarjat on saatu yhdistämällä entisen Länsi-Saksan ja yhdistyneen Saksan aikasarjat. Malli koostuu kuudesta muuttujasta: inflaatio, lyhyt korko, pitkä korko, osaketuotto, kiinteistötuotto ja hedge-rahastojen tuotto. Osaketuottoa kuvaava muuttuja on saatu lineaarikombinaationa Saksan ja USA:n tuottoindekseistä. Estimoinnissa käytetyt aikasarjat ovat pääosin samoja kuin raportissa Risku & Kaliva (2009). Kiinteistötuottojen mallintamisessa käytettiin suomalaisia aikasarjoja. Tarkempi kuvaus käytetystä aineistosta ja muuttujamuunnoksista löytyy liitteestä A.

Malli on perusrakenteeltaan hierarkkinen. Tältä osin malli muistuttaa jossain määrin David Wilkien esittämiä malleja sijoitustuotoille (Wilkie 1986, 1995). Toisin sanoen mallissa olevat riippuvuussuhteet oletetaan pääasiassa yksisuuntaisiksi. Koska mallinnuksen tarkoituksena ei ollut kausaalisuhteiden tutkiminen, ei ristikkäisten riippuvuussuhteiden huomiointia katsottu tarpeelliseksi. Ainoastaan osaketuottojen ja osakkeiden arvostusta kuvaavan P/E-suhteen välillä oletettiin vallitsevan ristikkäinen riippuvuussuhde, jonka mukanaolo mallissa perustuu olettamukseen osaketuottojen keskiarvohakuisuudesta.

3.2 Inflaatio

Inflaatio mallinnetaan eksogeenisena autoregressiivisenä muuttujana, jonka on riippuvainen vain omista viivästetyistä arvoistaan. Tilastollisten kriteerien perusteella päädyttiin AR(3) -malliin, jossa neljännesvuosi-inflaatio riippuu kolmen edellisen neljänneksen tasosta. Mallin estimaattien perusteella vuotuisen inflaation odotusarvo on 2,8 prosenttia. Simuloinneissa päädyttiin malliin, jossa vuotuisen inflaation odotusarvo on 2,0 prosenttia. Myös inflaation varianssia alennettiin. Lopulta inflaation logaritmisena neljännesvuosi-inflaation $\pi_t = 100 * \ln \left(\frac{CPI_t}{CPI_{t-1}} \right)$ (CPI=kuluttajahintaindeksi) osalta päädyttiin malliin

$$\pi_t = 0.1 + 0.209\pi_{t-1} + 0.240\pi_{t-2} + 0.350\pi_{t-3} + \varepsilon_{1t},$$

jossa $\varepsilon_{1t} \sim NID(0, 0.3^2)$.

3.3 Korot

Korkojen osalta päädyttiin käyttämään samanlaista mallia kuin Risku & Kaliva (2009). Pitkä eli viiden vuoden korko määräytyy tässä mallissa inflaatio-odotusten ja niistä riippumattoman odotetun reaalikoron summana. Tarkkaan ottaen tilastollisessa mallinnuksessa käytettiin

² Estimoinnissa käytetyt aikasarjat ovat pääosin samoja kuin raportissa Risku & Kaliva (2009).

tettiin pitkän koron L_t sijasta sen logaritmista korkotekijää $l_t = 100 \times \ln(1 + L_t / 100)$. Inflaatio-odotukset määräytyvät inflaatiohavaintojen eksponentiaalisesti tasoitettuna keskiarvona

$$\overline{\pi}_t = (1 - \lambda)\overline{\pi}_{t-1} + \lambda\pi_t = (1 - \lambda)\sum_{i=0}^{t-1} \lambda^i \pi_{t-i} + (1 - \lambda)^t \overline{\pi}_0,$$

jossa $\lambda = 0.9$ on tasoitusparametri.

Reaalisen pitkän koron taas oletettiin noudattavan stationaarista AR(1) -prosessia. Niin kutsutun odotushypoteesin (Campbell ym. 1997) hengessä lyhyen koron oletettiin seuraavan pitkän koron muutoksia. Lyhyen ja pitkän koron logaritmiseksi erotuksen $s_t - l_t$ oletettiin noudattavan ARMA(1,1) -prosessia:

$$s_t - l_t = \alpha_0 + \alpha_1(s_{t-1} - l_{t-1}) + \alpha_3 \varepsilon_{3,t-1} + \varepsilon_{3,t},$$

jossa $\varepsilon_{3,t} \sim NID(0, \sigma_3^2)$.

Korkojen osalta malli perustuu olettamukseen nk. arbitraasivapaudesta, jonka mukaan korkomarkkinoilla on mahdotonta tehdä voittoa tyhjästä ilman tappion mahdollisuutta. Arbitraasivapaudesta seuraa mm. negatiivisten korkojen mahdottomuus ja se että nollakuponkivelkakirjan hinta on maturiteetin suhteen laskeva. Tämä johtaa logaritmisten korkotekijöiden kohdalla rajoitusehtoon. Korkorealisaatioiden arbitraasivapaus toteutettiin mallissa sensuroimalla arbitraasia tuottavat havainnot simuloinneissa. Näiden tilalle simuloitiin uudet havainnot.

Estimointitulosten perusteella pitkän reaalikoron odotusarvoksi saatiin 3,0 prosenttia ja lyhyen reaalikoron odotusarvoksi taas 2,2 prosenttia. Simuloinneissa päädyttiin käyttämään jonkin verran matalampia odotusarvoja. Pitkän reaalikoron odotusarvo asetettiin 2,5 prosenttiin ja lyhyen reaalikoron taas 1,8 prosenttiin. Simuloinneissa käytetyt mallit reaaliselle pitkälle korolle $rl_t = l_t - \overline{\pi}_t$ voidaan esittää muodossa:

$$rl_t - 2.5 = 0.93(rl_{t-1} - 2.5) + \varepsilon_{2t},$$

jossa $\varepsilon_{2t} \sim NID(0, 0.47^2)$.

Korkoeron $s_t - l_t$ kohdalla päädyttiin taas käyttämään mallia

$$s_t - l_t = -0.136 + 0.822(s_{t-1} - l_{t-1}) + 0.172\varepsilon_{3,t-1} + \varepsilon_{3,t},$$

jossa $\varepsilon_{3,t} \sim NID(0, 0.69^2)$.

Velkakirjatuotto on uudessa mallissa muodostettu samalla tavalla kuin aikaisemmassa mallissa (Risku & Kaliva (2009) s. 15), siten että puolivuositainen logaritminen velkakirjatuotto b_t voidaan lausua pitkän koron ja sen muutoksen summana muodossa

$$b_t = 0.5l_{t-2} - 4.5(l_t - l_{t-2}).$$

3.4 Kiinteistötuotot

Kiinteistötuottojen mallintamisessa käytettiin hyväksi Tilastokeskuksen asuntojen hinta- ja vuokraindexejä. Mallinnuksessa käytetyt kiinteistötuotot sisältävät sekä arvonmuutoksen ja vuokratuoton. Aineisto on vuosiaineisto, joka kattaa ajanjakson 1970–2007. Tarkempi kuvaus mallinnuksessa käytettävistä indekseistä löytyy liitteestä A.

Käytettävillä indekseillä on monia puutteita. Ensimmäiseksi ne kuvaavat vain asuntojen hintoja eivätkä liikekiinteistöjä, jotka muodostavat suurimman osan työeläkeyhtiöiden kiinteistösijoituksista. Toiseksi ne eivät sisällä kiinteistöjen ylläpitokustannuksia. Kolmanneksi, suomalaisiin aikasarjoihin sisältyy yleensä huomattavaa vaihtelua. Neljänneksi, havaintojen lukumäärä ei ole kovin suuri.

Yllämainittujen ongelmien vuoksi aikaisempaan tutkimukseen perustuvan informaation merkitys korostuu kiinteistötuottomallin kalibroinnissa. Kattavan esityksen kiinteistötuottojen tieteellisestä tutkimuksesta ovat esittäneet Benjamin ym. (2001). Vakuutusalan näkökulmasta kiinteistötuottojen mallintamista on käsitelty suhteellisen vähän. Näistä tutkimuksista mainittakoon Daykin & Hey (1990), Wilkie (1995), Booth (2002) ja Booth & Marcato (2002).

Tilastollisten kriteerien perusteella päädyttiin malliin, jossa logaritmoidut reaaliset kiinteistötuotot riippuivat sekä saman että edellisen vuoden logaritmoiduista reaalisista osaketuotoista. Osaketuotoista riippumaton osa noudatti MA(1) -prosessia. Estimoiduksi malliksi logaritmoiduille reaalisille kiinteistötuotoille k_t saatiin

$$k_t = 0.0515 + 0.056r_t + 0.149r_{t-1} + \varepsilon_{4,t} + 0.790\varepsilon_{4,t-1}$$

$$\varepsilon_{4,t} \sim NID(0, 0.058^2),$$

jossa r_t on vuotuinen reaalin osaketuotto.

Osaketuottojen ja kiinteistötuottojen välistä riippuvuutta ei pidä tulkita kausaaliseksi. Yksi selitys positiiviselle korrelaatiolle osaketuottojen ja kiinteistötuottojen välillä on, että ne molemmat riippuvat positiivisesti yleisestä talouskehityksestä. Epälikviidisyyden ja epätäydellisen informaation vuoksi uusi informaatio välittyy kiinteistöjen kaupankäyntihintoihin hitaammin kuin osakemarkkinoilla. Tämän vuoksi kiinteistötuotot ovat positiivisesti autokorreloituneita ja korreloivat positiivisesti viivästettyjen osaketuottojen kanssa. Estimointitulosten perusteella viivästettyjen osaketuottojen regressiokerroin oli korkeampi kuin saman vuoden osaketuoton.

Kiinteistötuottoindeksien positiivinen autokorrelaatio on jo aikaisemmin hyvin tiedetty tosiasia. Quan & Titman (1997) ovat tarkemmin käsitelleet kiinteistötuottojen autokorreloituneisuutta. Myös osaketuottojen ja kiinteistötuottojen välisestä korrelaatiosta on paljon näyttöä. Quan & Titman (1997) ovat löytäneet positiivisen korrelaation olemassaolosta tukea kansainvälisistä paneeliaineistoista. Käyttämällä autokorrelaatiosta puhdistettua aikasarjaa Geltner (1993) on estimoinut osake- ja kiinteistötuottojen korrelaatioksi 0.3 USA:n aineistolla. Booth & Marcato (2002) ovat päätyneet samansuuruisen korrelaation Iso-Britannian aineistolla.

Kiinteistöjen keskituotto oli saatujen estimaattien perusteella epärealistisen korkea. Kos-

ka käytettävät indeksit eivät sisältäneet kiinteistöjen ylläpitokustannuksia, tulos ei ole yllättävä. Simuloinneissa vakiotermit asetettiin siten että kiinteistöjen reaalin keskituotto on 3,7 prosenttia. Tämä toteutui vakiotermin arvolla 0.026.

3.5 Osaketuotot

Osaketuottojen kohdalla malli perustui olettamukseen pitkän aikavälin keskiarvohakuisuudesta, jonka mukaan osalla lyhyen aikavälin tuottojen vaihtelusta on taipumus hävitä pitkällä aikavälillä. Toisin sanoen pitkän aikavälin kumuloitujen osaketuottojen luottamusväli on kapeampi kuin satunnaiskulkuun perustuvan mallin luottamusväli. Satunnaiskulkua noudattavan prosessin ehdollinen varianssi kasvaa suorassa suhteessa ennusteperiodin varianssiin. Lyhyellä aikavälillä paljon heilahtelevien osaketuottojen kohdalla tämä oletamus johdattaa varsin leveisiin luottamusväleihin pitkän aikavälin tarkasteluissa.

Tässä mallissa osaketuottojen keskiarvohakuisuutta mallinnettiin olettamalla osaketuottojen riippuvan edellisen vuosineljänneksen tasoitetusta hinta/voitto ($\frac{P}{E}$)-suhteesta ja saman neljänneksen inflaatiosta. Lyhytaikaisen satunnaisvaihtelun tasoittamiseksi neljännesvuosivoittojen sijasta mallissa käytettiin niiden eksponentiaalisesti tasoitettua liukuvaa keskiarvoa. Hinta/voitto-suhteen lisäksi osaketuotot riippuivat mallissa negatiivisesti saman neljänneksen inflaatiosta. Osaketuottojen ja inflaation väliselle riippuvuudelle löytyy paljon tukea aikaisemmista tutkimuksista (esim. Ritter & Warr 2002). Empiiristä näyttöä sen puolesta, että hinta/voitto-suhteella on ennustevoimaa tulevien osaketuottojen suhteen, ovat esittäneet mm. Campbell & Yogo (2006) sekä Cochrane (2008).

Mallissa osaketuottoihin vaikuttaa näiden lisäksi informaatioshokkia kuvaa satunnais-tekijä, jonka seurauksena osaketuotot ehdollinen jakauma on kahden normaalijakauman sekoitusjakauma. Tällöin malli reaalisille logaritmisille osaketuotoille $r_t - \pi_t$ voidaan esittää muodossa

$$\begin{aligned} r_t - \pi_t &= a - b_1 y_{t-1} - b_2 \pi_t + \varepsilon_{5,t} + z_t s_t \\ \varepsilon_{5,t} &\sim NID(0, \sigma_4^2) \\ s_t &\sim NID(a_2, \sigma_5^2) \\ z_t &\sim \text{bernoulli}(p), \end{aligned} \tag{1}$$

jossa yhtälön viimeinen termi kuvaa informaatioshokkia. Muuttuja z_t on kaksiluokkainen indikaattorimuuttuja, joka kuvaa shokin esiintyvyyttä. Tämän muuttujan saadessa arvon nolla, ollaan nk. vakaassa tilassa, jolloin shokkia esiinny. Kun muuttuja saa arvon yksi, ollaan nk. shokkitilassa. Malli perustuu olettamukseen, ettei shokin ilmaantumista voida etukäteen ennustaa. Muuttujan z_t oletetaan olevan riippumaton omista viivästetyistä arvoistaan ja noudattavan bernoullijakaumaa todennäköisyydellä p .

Tasoitetun hinta/voitto-suhde y_t riippuu mallissa saman neljänneksen osaketuotosta

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= c([r_t - \pi_t] - \mu) + v_t \\ v_t &= \delta v_{t-1} + \varepsilon_{6,t}, \end{aligned} \tag{2}$$

jossa $\varepsilon_{6,t} \sim NID(0, \sigma_6^2)$.

Osaketuottojen (r_t) ollessa korkeita myös P/E-luku (y_t) kasvaa, jolla taas on negatiivinen vaikutus osaketuottoihin. Mallissa osakkeiden arvostuksella on taipumus nousta kun reaali-tuotot r_t ovat odotusarvon μ yläpuolella. Arvostustaso vastaavasti laskee tuottojen ollessa tätä arvoa pienempiä.

Osaketuottomalli (1) estimoitiin käyttämällä numeerisia estimointimenetelmiä. Numeerisiin estimointimenetelmiin jouduttiin turvautumaan, koska suurimman uskottavuuden estimaatit eivät ole analyttisesti ratkaistavissa kahden normaalijakauman sekoitusjakauman ollessa ehdollisena jakaumana. Käyttämällä R-ohjelmassa oleva NLM-algoritmia estimoiduksi malliksi reaalisille logaritmisille osaketuotoille r_t saatiin

$$\begin{aligned} r_t &= 0.138 - 0.0237y_{t-1} - 5.279\pi_t + \varepsilon_{4,t} + z_t s_t \\ \varepsilon_{4,t} &\sim NID(0, 0.0588^2) \\ s_t &\sim NID(-0.1437, 0.1485^2) \\ z_t &\sim \text{bernoulli}(0.168), \end{aligned}$$

jossa y_t on tasoitettu logaritminen hinta/voitto (P/E) -suhde, π_t on taas logaritminen inflaatio.

Estimoititulosten mukaan informaatioshokin todennäköisyys on 16,8 prosenttia. Joten niitä esiintyy keskimäärin joka kuudes neljännes. Informaatioshokin keskimääräinen vaikutus osaketuottoihin on -14,4 prosenttia. Mallissa informaatioshokin vaikutus voi olla myös positiivinen. Estimaattien perusteella 16,7 prosenttia informaatioshokeista on positiivisia.

Inflaation regressiokerroin on varsin korkea. Teorian mukaan inflaation ja reaali-tuottojen välillä ei kuitenkaan pitäisi olla merkittävää riippuvuutta. Empiiristen tutkimusten perusteella (esim. Ritter & Warr 2002) nämä kuitenkin selvästi korreloivat keskenään. Näkemyksemme mukaan valittu estimointiperiodi (3/1972–4/2008) kuitenkin jonkin verran liioittelee osakkeiden ja inflaation välistä riippuvuutta. Simuloinneissa regressiokertoimen arvoksi asetettiin -3 (estimoitu arvo -5.28). Tämän muutoksen vastapainoksi myös mallin vakio-tekijän arvoksi asetettiin estimaattia alempi arvo. Lopulta simuloinneissa päädyttiin käyttämään mallia:

$$\begin{aligned} r_t &= 0.116 - 0.0237y_{t-1} - 3\pi_t + \varepsilon_{4,t} + z_t s_t \\ \varepsilon_{4,t} &\sim NID(0, 0.0588^2) \\ s_t &\sim NID(-0.1437, 0.1485^2) \\ z_t &\sim \text{bernoulli}(0.168). \end{aligned}$$

Tasoitettun P/E-luku y_t riippui mallissa saman positiivisesti saman neljänneksen osakkeiden reaali-tuotosta. Estimoiduksi malliksi saatiin

$$\begin{aligned} \Delta y_t &= 0.9586([r_t - \pi_t] - 0.011) + v_t \\ v_t &= 0.669v_{t-1} + \varepsilon_{5,t} \\ \varepsilon_{5,t} &\sim NID(0, 0.01735^2). \end{aligned}$$

Simuloinneissa oli päädytty käyttämään mallia, joka kuvaa estimoitua mallia paremmin käsitystämme osakkeiden pitkän aikavälin keskituottoa. Tässä mallissa parametrin μ arvoksi

yhtälössä (2) asetettiin 0.0125. Tämä parametrin arvo vastaa 5,1 prosentin vuotuista odotettua geometrista keskituottoa. Valittu keskituotto on sopusoinnussa Dimson ym. (2004, 2008) kanssa, jotka ovat huolellisen arvion jälkeen päätyneet osakkeiden riskipreemion olevan lyhyeen korkoon nähden 3–3,5 prosenttia. Heidän arvionsa osakkeiden keskituotolle on hieman korkeampi kuin mallimme antama estimaatti mutta selvästi matalampi kuin useat historialliseen keskituottoon perustuvat arviot.

Selitykseksi, miksi historialliset tuotot yleensä yliarvioivat osakkeiden riskipreemiota, Dimson (2004, 2008) tarjoavat selviytymisharhaa ja hyvää tuuria. Osaketuottojen arvioinnissa käytetään pitkiä aikasarjoja, joissa ei ole katkoksia. Tällöin analyysiin pääsevät mukaan vain menestyneet kansantaloudet. Erityisesti ongelma koskettaa USA:n osaketuottoihin perustuvia analyyseja. USA:n korkea taloudellinen painoarvo nimittäin perustuu hyvään talouskehitykseen. Arnott & Bernstein (2002) ovat analysoineet hyvän tuurin vaikutusta osakemarkkinoilla. Vuoden 1926 jälkeen on tapahtunut monia merkittäviä osakemarkkinoiden kannalta positiivisia yllätyksiä, joita oli lähes mahdotonta etukäteen ennustaa.

Kuten liitteessä B on osoitettu, kumulatiivisilla reaalitytuotoilla $\sum_{j=1}^h r_{t+j}$ on pitkällä aikavälillä taipumus hakeutua prosessin $\sum_{j=1}^k v_{t+j}$ määrittämälle kasvu-uralle. Logaritmisien reaalitytuoton odotusarvo mallissa on 0.0125, joka vastaa 5,1 prosentin vuotuista geometrista keskituottoa. Osaketuotot, jotka ylittävät tämän keskituoton, nostavat P/E-lukua. Vastaavasti taas keskimääräistä alemmat tuotot alentavat P/E-lukua. Keskiarvohakuisuutta kuvaava asymptoottinen varianssisuhde (ks. liite B) on edellä esitetyn mallin kohdalla 29,2 prosenttia.

3.6 Hedge-rahastot

Hedge-rahasto (*hedge fund*) on sijoitusrahasto, joka pyrkii markkinatilanteesta riippumatta tuottamaan voittoa. Näistä rahastoista käytetään myös nimitystä absoluuttisen tuoton rahasto. Verrattuna perinteisiin sijoitusrahastoihin hedge-rahastojen sääntely on hyvin niukkaa. Suorien osake- ja korkosijoitusten lisäksi hedge-rahastot sijoittavat mm. valuuttoihin, raaka-aineisiin ja johdannaisiin. Erilaisten sijoitusstrategioiden vuoksi hedge-rahastoille on vaikea antaa täsmällistä määritelmää. Ensimmäisenä hedge-rahastona pidetään yleisesti Alfred W. Jonesin vuonna 1949 perustamaa rahastoa, jonka ideana oli ostaa aliarvostettuja osakkeita ja myydä lyhyeksi yliarvostettuja osakkeita (Stulz 2007). Hedge-rahastojen tutkimus on viime vuosien aikana kasvanut melkoisesti. Lo (2005) ja Stulz (2007) ovat hyviä esityksiä aiheeseen liittyvään tieteelliseen tutkimukseen.

Hedge-rahastojen tuotoista on myös tuotettu erilaisia indeksejä (ks. esim. Amenc & Martellini 2002). Indeksissä mukana olevat rahastot vapaaehtoisesti ilmoittavat tuottoensa indeksin tuottajille. Vapaaehtoisuuden vuoksi indekseihin liittyy monenlaisia puutteita mm. selviytymisharha. Rahastot, joiden tuotot ovat huonot, jättävät muita helpommin ilmoittamatta tuottoensa indeksin tuottajalle. Arviot siitä kuinka paljon tämä harha vaikuttaa keskituottoihin vaihtelevat vuosituohtoina mitattuna alle yhdestä prosenttiyksiköstä yli neljään prosenttiyksikköön (Stulz 2007). Indeksit poikkeavat tavanomaisista osakeindekseistä siinä mielessä, että sijoittaja ei voi suoraan sijoittaa näiden indeksien mukaisiin sijoituskohteisiin.

Mallinnuksessa käytettiin Yhdysvaltalaisen Hennessee Group LLC:n julkaisemaa Hennessee -indeksiä ajanjaksolta 1/1993–4/2009. Nk. kutsutun CAPM-mallin (esim. Fama &

French (2004) hengessä päädyttiin malliin, jossa logaritmiset hedge-rahasto -tuotot h_t voidaan lausua vakiotermin, lyhyen koron, osaketuoton ja satunnaistekijän summana

$$h_t - s_{t-1} = \alpha + \beta(r_t - s_{t-1}) + \varepsilon_{7,t}$$

$$\varepsilon_{7,t} \sim NID(0, \sigma_7^2),$$

jossa r_t on USA:n logaritminen osaketuotto ja s_t lyhyen koron logaritminen korkotuotto. Aineiston perusteella estimoiduksi malliksi saatiin

$$h_t - s_{t-1} = 0.0119 + 0.392(r_t - s_{t-1}) + \varepsilon_{7,t}$$

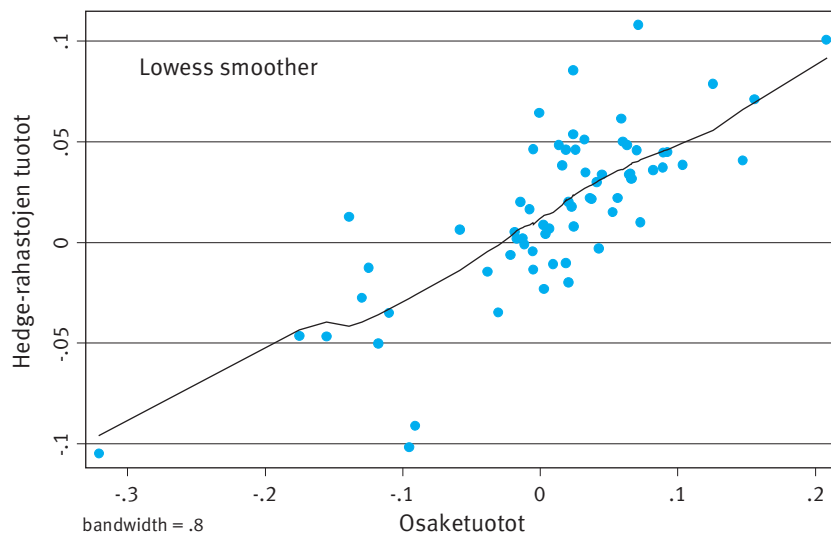
$$\varepsilon_{7,t} \sim NID(0, 0.0261^2).$$

Simuloinneissa päädyttiin käyttämään mallia, jossa $\alpha = 0.00175$, $\beta = 0.4$ ja $\sigma_7 = 0.0275$. Odotettua tuottoa alennettiin, koska indeksin perusteella lasketut keskituotot todennäköisesti yliarvioivat todellisia tuottoja. Toiseksi, hedge-rahastojen yleistymisen ja kilpailun kiristyminen tekee ylituoton tavoittelemisen tulevaisuudessa hankalammaksi kuin aikaisemmin (Stulz 2007).

Malli hedge-rahastojen tuotoille perustuu olettamukseen lineaarisesta riippuvuudesta osaketuottojen ja hedge-rahastojen tuottojen välillä. Koska hedge-rahastot sijoittavat jonkin verran epälineaariin johdannaisopimukseen, voidaan oletus lineaarisesta riippuvuudesta asettaa kyseenalaiseksi. Lineaarisuusoletusta tutkittiin käyttämällä ei-parametristä regressioanalyysia. Nk. LOWESS-tasoituksen (Cleveland 1979) avulla hedge-rahastojen ja korkotuoton logaritmien erotusta $h_t - s_{t-1}$ selitettiin osaketuottojen ja korkotuoton logaritmisella erotuksella $r_t - s_{t-1}$. Kuvion 1 mukaan selkeitä todisteita epälineaarisuuden puolesta ei löydy. Mallin residuaalien normaalisuutta testattiin Shapiro-Wilks -testillä. Testin p-arvoksi saatiin lievästi merkitsevä 3,9 prosenttia. Koska poikkeama normaalisuusolettamuksesta oli näin lievää, voidaan katsoa mallin kuvaavan hedge-rahastojen häntäriskejä riittäväällä tarkkuudella.

Kuva 1.

Hedge-rahastojen ja osaketuottojen välinen LOWESS-tasointus.



4 Simuloinnit

Sijoitustuottomallin ominaisuuksia tutkittiin simuloimalla 10 000 kertaa 70 vuoden skenaario. Simuloinneissa käytetyt alkuarvot oli asetettu likimäärin vastaamaan kesäkuun 2009 tilannetta. Inflaatio oli 2,0 prosenttia, lyhyt korko 2,5 prosenttia ja pitkä korko 3,5 prosenttia. Osakkeiden arvostustaso oli mallissa asetettu vastaamaan keskimääräistä arvostustasoa ($\ln \frac{P_t}{E_t} = 2.7$). Riskitarkasteluissa käytettiin taulukon 1 mukaista sijoitusallokaatiota, jossa osakkeiden osuus on 35 prosenttia. Sijoitusluokkien paino on näissä tarkasteluissa ajan suhteen vakio.

Taulukko 1.

Sijoitusallokaation jakauma.

Sijoitusluokka	Osuus, %
Korot	11
Joukkovelkakirjat	35
Kiinteistöt	12
Osakkeet	35
Hedge-rahastot	7

Taulukossa 2 on esitetty vuotuinen reaalituottojakauma. Jakauma on laskettu seitsemän miljoonan vuotuisen (70×10 000) realisaation perusteella. Näin saatua jakaumaa on verrattu sekä normaalijakauma- että log-normaalijakauma-approksimaatioon. Taulukossa on esitetty jakaumien 0,5; 5; 25; 50; 75; 95 ja 99,5 prosentin kvantiilipisteet, keskiarvot ja keskihajonnat.

Taulukko 2.

Reaalituoton jakauman tunnuslukuja.

	Simuloitu jakauma, %	Normaalijakauma, %	Log-normaalijakauma, %
0.5 %	-17.4	-17.2	-15.5
5 %	-9.7	-9.4	-8.9
25 %	-1.1	-1.3	-1.5
50 %	4.6	4.4	4.0
75 %	9.9	10.0	9.9
95 %	17.8	18.1	18.8
99.5 %	26.5	25.9	28.1
Ka (aritm.)	4.4	4.4	4.4
Ka (geom.)	4.0	-	4.0
Keskihajonta	8.4	8.4	8.5

Simuloitujen realituottojen jakauma on lähempänä normaalijakaumaa kuin log-normaalijakaumaa. Log-normaalijakaumaan nähden simuloinnit tuottivat huomattavasti enemmän

suuria negatiivisia tuottoja. Simuloidun jakauman 0,5 prosentin kvantiilipiste on -17,4 prosenttia. Vähintään yhtä huonoja tuottoja tapahtuu siis simuloitien perusteella kerran 200 vuodessa. Log-normaalijakauman mukaan vähintään yhtä huonojen tuottojen todennäköisyys on 0,22 prosenttia. Vähintään yhtä huonoja tuottoja pitäisi esiintyä keskimäärin kerran 460 vuodessa. Vastaavasti log-normaaliapproksimaation mukaan suurten positiivisten tuottojen todennäköisyys on suurempi kuin simuloidussa jakaumassa.

5 Yhteenveto

Raportissa esitellään ETK:n uusi sijoitustuottomalli eläketurvan kestävyystarkasteluihin. Mallissa on mukana viisi sijoitusluokkaa: korot, joukkovelkakirjat, kiinteistöt, osakkeet ja hedge-rahastot. Mallissa on pyritty huomioimaan aikaisempaa realistisemmin suurten pörssiromahdusten mahdollisuus. Osaketuottojen kohdalla päädyttiin malliin, jossa logaritmisien osaketuottojen ehdollinen jakauma on kahden normaalijakauman sekoitusjakauma. Kiinteistötuotot ja hedge-rahastojen tuotot ovat oletettu riippuvan osaketuotoista.

LIITTEET

Liite A: Aineisto

Aineistona käytettiin saksalaisia neljännesvuosi-aikasarjoja, jotka olivat saatu yhdistämällä entisen Länsi-Saksan ja yhdistyneen Saksan aikasarjat. Estimoitu malli koostuu neljästä muuttujasta: inflaatio, pitkä korko, lyhyt korko ja osaketuotot. Velkakirjatuotot määräytyivät mallissa pitkän koron perusteella. Osaketuottoja kuvaava muuttuja oli saatu yhdistämällä saksalainen osakeindeksi ja yhdysvaltalainen osakeindeksi Saksan valuutaksi muutettuna. Tarkoituksena on approksimoida globaalisti hajautetun osakesalkun tuottoa ja riskiä.

Kiinteistötuottojen kohdalla on käytetty suomalaisia asuntojen hinta- ja vuokratasoa kuvaavia aikasarjoja. Kiinteistöjen reaalisien tuottojen laskemiseksi on käytetty Suomen elinkustannusindeksiä. Selittävänä muuttujana käytettiin Helsingin pörssin osaketuottoindeksiä. Käytettävät aikasarjat ovat vuosisarjoja. Vuokran määrä suhteessa asunnon hintaan on määritelty vuoden 2001 neliöhintojen perusteella.

Estimoinnissa käytetty aineisto:

- i) *Hintataso, Saksa.* Kausivaihtelusta tasoitettu kuluttajanhintaindeksi 4/1959–2/2009. Lähde: Bundesbank (www.bundesbank.de/statistik/).
- ii) *Hintataso, Suomi.* Elinkustannusindeksi. Lähde: Tilastokeskus.
- iii) *Pitkä korko.* Viiden vuoden keskuspankkikorko, kuukauden viimeinen päivä, Saksa. Lähde: Bundesbank (www.bundesbank.de/statistik/).
- iv) *Lyhyt korko.* Frankfurtin pankkien ilmoittama kolmen kuukauden rahamarkkinakorko, kuukauden keskiarvo. Lähde: Bundesbank (www.bundesbank.de/statistik/).
- v) *Osaketuotto ja P/E-suhde, Saksa.* CDAX markkina-arvoindeksi, kaikki yritykset. Lähde: Global Financial Data (www.globalfindata.com).
- vi) *Osaketuotto ja P/E-suhde, Yhdysvallat.* Standard & Poor 500 markkina-arvoindeksi, suuret yritykset. Lähde: Robert Shillerin kotisivu (www.econ.yale.edu/~shiller/).
- vii) *Osaketuotto, Suomi.* OMX -tuottoindeksi. Lähde: Global Financial Data (www.globalfindata.com).
- viii) *Kiinteistötuotto, Suomi.* Asuntojen hintaindeksi (1970=100), vanhojen kerrostaloasuntojen neliöhinta, neliövuokra indeksi. Lähde: Tilastokeskus.
- ix) *Vaihtokurssi, Saksa/Yhdysvallat.* Lähde: vuoden 1998 loppuun asti Bundesbank (www.bundesbank.de/statistik/) ja vuoden 1999 alusta lähtien ECB, Statistical Data Warehouse
- x) *Hedge-rahastot, USA.* Hennessee hedge fund -indeksi. Lähde: www.hennesseegroup.com/indices/index.html

Liite B: Osaketuotot

Logaritmistien osaketuottojen ehdollisen jakauman oletettiin mallissa olevan kahden normaalijakauman sekoitusjakauma. Tämän jakauman tiheysfunktio voidaan pisteessä x esittää muodossa $(1-p)\phi(x, \mu_1, \sigma_1^2) + p\phi(x, \mu_2, \sigma_2^2)$, jossa $\phi(x, \mu, \sigma^2)$ on normaalijakauman tiheysfunktio odotusarvolla μ ja varianssilla σ^2 . Sekoitusjakaumaa noudattavan muuttujan x odotusarvo voidaan laskea kaavalla $(1-p) \int_{-\infty}^{\infty} x \phi(x, \mu_1, \sigma_1^2) dx + p \int_{-\infty}^{\infty} x \phi(x, \mu_2, \sigma_2^2) dx$. Yleisemmin muuttujan x^k , jossa $k > 0$, odotusarvoksi saadaan

$$(1-p) \int_{-\infty}^{\infty} x^k \phi(x, \mu_1, \sigma_1^2) dx + p \int_{-\infty}^{\infty} x^k \phi(x, \mu_2, \sigma_2^2) dx.$$

Soveltamalla edellä esitettyjä kaavoja muuttujan X odotusarvoksi $E(X)$ saadaan $E(X) = (1-p)\mu_1 + p\mu_2$. Varianssi taas saadaan laskettua kaavalla $VAR(X) = E(VAR(X|Z)) + VAR(E(X|Z))$, jossa Z on luvussa 2 esitetty kaksiarvoinen tilamuuttuja. Kaavan avulla saadaan $VAR(X) = (1-p)\sigma_1^2 + p\sigma_2^2 + p(1-p)(\mu_1 - \mu_2)^2$. Kolmas keskusmomentti $m_3 = E(X - E(X))^3$ taas voidaan esittää muodossa:

$$(1-p)\{3p\sigma_1^2(\mu_1 - \mu_2) + p^3(\mu_1 - \mu_2)^3\} + p\{3(1-p)\sigma_2^2(\mu_2 - \mu_1) + (1-p)^3(\mu_2 - \mu_1)^3\} \\ = p(1-p)\{3(\mu_1 - \mu_2)(\sigma_1^2 - \sigma_2^2) + (2p-1)(\mu_1 - \mu_2)^3\}.$$

Neljäs keskusmomentti $m_4 = E(X - E(X))^4$ taas on

$$(1-p)\{3\sigma_1^4 + 6\sigma_1^2 p^2(\mu_1 - \mu_2)^2 + p^4(\mu_1 - \mu_2)^4\} \\ + p\{3\sigma_2^4 + 6\sigma_2^2(1-p)^2(\mu_1 - \mu_2)^2 + (1-p)^4(\mu_1 - \mu_2)^4\}.$$

Sijoittamalla simuloinneissa käytetyt arvot edellä esitettyihin kaavoihin logaritmistien osaketuottojen ehdolliseksi varianssiksi $Var(X)$ saadaan 0.102. Ehdolliseksi vinoudeksi $\gamma_1 = \frac{m_3}{Var(X)^{3/2}}$ saadaan 1.59 ja ehdolliseksi huipukkuudeksi $\gamma_2 = \frac{m_4}{Var(X)^2} = 7.63$. Normaalijakauman tapauksessa vinous on 0 ja huipukkuus 3.

Malli 2 logaritmisille reaalitytoille voidaan kirjoittaa muodossa $r_t = a - b_1 y_{t-1} - b_2 \pi_t + e_t$, jossa on kahden normaalijakauman sekoitusjakaumaa noudattava satunnaistermi.

Yksi mallin perusominaisuuksia on se, että osakkeiden reaalitytot ovat pitkällä aikavälillä riippuvaisia inflaatiosta. Tämä nähdään sijoittamalla r_t jälkimmäiseen yhtälöön, jolloin saadaan

$$y_t = a_2 + ca_1 + (1 - cb_1)y_{t-1} - cb_2\pi_t + ce_t + v_t,$$

josta saadaan rekursiivisesti

$$y_t = (a_1 - \mu) / b_1 - cb_2 \sum_{i=0}^{\infty} (1 - cb_1)^i \pi_{t-i} + c \sum_{j=0}^{\infty} (1 - cb_1)^j e_{t-j} + \sum_{k=0}^{\infty} (1 - cb_1)^k v_{t-k},$$

jossa vakiotermi tulee geometrisen sarjan summana. Sijoittamalla saatu lauseke osaketuoton yhtälöön saadaan

$$r_t = \mu + b_2 cb_1 \sum_{i=0}^{\infty} (1 - cb_1)^i \pi_{t-i-1} - b_2 \pi_t - b_1 \sum_{j=0}^{\infty} (1 - cb_1)(ce_{t-j-1} + v_{t-1}) + e_t.$$

Koska kertoimet $cb_1 \sum_{i=0}^{\infty} (1 - cb_1)^i$ summautuvat ykköseksi, inflaation pitkän aikavälin vaikutus osakkeiden reaalityttöihin on nolla. Toisin sanoen prosentin muutos inflaatioprosessissa näkyy pitkällä aikavälillä yhtä suurena muutoksena nimellistuotoissa. Vaihtoehtoinen esitystapa edelliselle yhtälölle on muotoa

$$r_t = \mu - b_2 (\pi_t - cb_1) \sum_{i=0}^{\infty} (1 - cb_1)^i \pi_{t-i-1} + b_1 \sum_{j=0}^{\infty} (1 - cb_1)(ce_{t-j-1} + v_{t-1}) + e_t.$$

Toisin sanoen reaaliset osaketuotot ovat mallissa negatiivisesti riippuvaisia inflaation ja sen pitkän aikavälin keskiarvon erotuksesta eivätkä siis inflaation absoluuttisesta tasosta. Osakkeiden odotettu reaalityttö tässä mallissa on μ .

Toinen mallin perusominaisuuksista kumulatiivisilla reaalityttöillä $\sum_{j=1}^h r_{t+j}$ on sijoitushorisontin pituuden h kasvaessa taipumusta hakeutua kasvu-uralle $h\mu - \sum_{i=1}^h v_{t+i} / c$. Tämä ominaisuus nähdään esittämällä reaalityttö muodossa

$$r_t = \mu + \Delta y_t / c - v_t / c.$$

Kumulatiivisille reaalityttöille pätee nyt

$$\sum_{j=1}^h r_{t+j} = h\mu + (y_{t+h} - y_t) / c - \sum_{i=1}^h v_{t+i} / c.$$

Kumulatiiviset tuotot sisältävät siis stationaarisen keskiarvoon hakeutuvan osan $(y_{t+h} - y_t) / c$ ja ei-stationaarisen osan $-\sum_{i=1}^h v_{t+i} / c$. Sijoitushorisontin pituuden h kasvaessa stationaarisen osan $(y_{t+h} - y_t) / c$ varianssi lähestyy kohti vakiota $Var(y_t)$, kun taas ei-stationaarisen osan varianssi kasvaa suorassa suhteessa sijoitushorisontin pituuteen h .

Jakamalla yhtälön molemmat puolet suurella \sqrt{h} saadaan

$$\frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{j=1}^h r_{t+j} = \sqrt{h}\mu + \frac{1}{\sqrt{h}}(y_{t+h} - y_t) / c - \frac{1}{\sqrt{h}} \sum_{i=1}^h v_{t+i} / c.$$

Sijoitushorisontin pituuden h kasvaessa yhtälön oikean puolen toisen termin varianssi lähestyy nollaa kun taas viimeisen termin varianssi lähestyy kohti arvoa

$$\frac{1}{(1 - \delta)^2} \sigma_5^2 / c^2.$$

Sijoitustuottojen varianssisuhteeksi $\frac{Var_t(\sum_{i=1}^h r_{t+i}) / h}{Var_t(r_{t+1})}$ saadaan

$$\frac{Var_t(\sum_{i=1}^h r_{t+i}) / h}{Var_t(r_{t+1})} = \frac{Var_t(y_{t+h} - y_t) / hc^2 + Var_t(\sum_{i=1}^h v_{t+i}) / hc^2 - 2Cov_t(y_{t+h} - y_t, \sum_{i=1}^h v_{t+i}) / hc^2}{b_2^2 Var_t(\pi_{t+1}) + Var_t(e_{t+1})}.$$

Ottamalla varianssisuhteesta raja-arvo saadaan

$$\lim_{h \rightarrow \infty} \frac{\text{Var}_t(\sum_{i=1}^h r_{t+i}) / h}{\text{Var}_t(r_{t+1})} = \frac{1}{(1-\delta)^2} \sigma_3^2 / c^2 \cdot \frac{1}{[b_2^2 \text{Var}_t(\pi_{t+1}) + \text{Var}_t(e_{t+1})]}.$$

Aineistosta saaduilla estimaateilla asymptoottiseksi varianssisuhteeksi saadaan 29,2 prosenttia.

LÄHTEET

Amenc N. & L. Martellini (2002): The brave new world of hedge fund indices, Working paper, ED-HEC/USC.

Arnott, R.D. & P.L. Bernstein (2002): What risk premium is "normal"? *Financial Analysts Journal* 58: 64–85.

Benjamin, J.D., G.S. Sirmans & E.N. Zietz (2001): Returns and risk on real estate and other investment: more evidence, *Journal of Real Estate Portfolio Management* 7: 183–214.

Black, F. (1976): Studies of stock price volatility changes, *Proceedings of the 1976 Meetings of the American Statistical Association, Business and Economic Statistics Section*, 177–181.

Blanchard, O.J. & M.W. Watson (1982): Bubbles, rational expectations, and financial markets, teoksesta P. Wachtel (toim.) *Crises in Economic and Financial Structure*. Lexington MA: Lexington Books, 295–315.

Booth, P.M. (2002): Real estate investment in an asset/liability modeling context, *Journal of Real Estate Portfolio Management* 8: 183–198.

Booth, P.M. & G. Marcato (2002): An analysis of the behaviour of commercial real estate indices, Faculty and Institute of Actuaries' investment conference.

Brunnermeier, M. (2001): *Asset Pricing Under Asymmetric Information: Bubbles, Crashes, Technical Analysis and Herding*, Oxford University Press.

Campbell, J.Y., A.W. Lo & A.C. MacKinlay (1997): *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.

Campbell, J.Y. ja M. Yogo (2006): Efficient test of stock return predictability, *Journal of Financial Economics* 81: 27–60.

Chen, J., H. Harrison & J.C. Stein (2001): Forecasting crashes, trading volume, past returns, and conditional skewness in stock prices, *Journal of Financial Economics* 61: 345–381.

Cleveland, W.S. (1979): Robust Locally Weighted Regression and Smoothing Scatterplots, *Journal of the American Statistical Association* 74: 829–836.

Cochrane, J. H. (2008): The Dog That Did Not Bark: A Defense of Return Predictability, *Review of Financial Studies*, 21: 1533–75.

Daykin C.D. & G.B. Hey (1990): Managing uncertainty in a general insurance company, *Journal of the Institute of Actuaries* 117: 173–277.

Derring, R.A. & E.D. Orr (2004): Equity risk premium: expectations great and small, *North American Actuarial Journal* 8: 45–69.

Dimson, E., P. Marsh & M. Staunton (2004): Irrational optimism, *Financial Analysts Journal* 60: 15–25.

- Dimson, E., P. Marsh & M. Staunton (2008): The worldwide equity premium: a smaller puzzle. Kirjassa R.Mehra (toim.): Handbook of the equity risk premium 467–514.
- Engle, R. (1995): ARCH: Selected Readings, Oxford University Press, New York.
- Fama, E.F. & K.R.French (2004): The capital asset pricing model: theory and evidence, Journal of Economic Perspectives 18: 25–46.
- Geltner, D. (1993): Estimating market values from appraised values values without assuming efficient market, Journal of Real Estate Research 8: 325–345.
- Kindelberger, C.P.(2005): Manias, Panics, and Crashes: A History of Financial Crises, Wiley, 5. painos
- Komunjer, I. (2007): Asymmetric Power Distribution: Theory and Applications to Risk Measurement, Journal of Applied Econometrics 22: 891–921.
- Kon, S.J.(1984): Models of stock returns – a comparison, Journal of Finance 39: 147–165.
- Lo, A.W. (2005): The Dynamics of the Hedge Fund Industry, Research foundation of CFA institute.
- Mandelbrot, B. (1963): The variation of certain speculative prices, Journal of Business 36: 394–419.
- Pindyck, R.S. (1984): Risk, inflation, and the stock market, American Economic Review 74: 334–351.
- Quan, D.C. & S.Titman (1997): Commercial real estate prices and stock market returns: an international analysis, Financial Analysts Journal 53: 21–34.
- Risku, I. & K.Kaliva (2009): Sijoitusriskien ja rahoitustekniikan vaikutus TyEL-maksun kehitykseen, Eläketurvakeskuksen keskustelualoitteita 2009:6.
- Ritter, J.R. & R. Warr (2002): The decline of inflation and the bull market of 1982–1999, Journal of Financial and Quantitative Analysis 37: 29–61.
- Sosiaali- ja terveystieteiden ministeriö (2010a): Yksityisten alojen työeläkejärjestelmän vakavaraisuussääntelyn uudistamista selvittäneen laaja-alaisen työryhmän selvitys, Sosiaali- ja terveystieteiden ministeriön selvityksiä 2010:12.
- Sosiaali- ja terveystieteiden ministeriö (2010b): Yksityisten alojen työeläkejärjestelmän vakavaraisuussääntelyn uudistamista selvittäneen työryhmän selvitys, Sosiaali- ja terveystieteiden ministeriön selvityksiä 2010:14.
- Stulz, R.M. (2007): Hedge funds: past, present and future, Journal of Economic Perspectives 21: 175–194.
- Theodossiou, P. (1998): Financial data and the skewed generalized t distribution, Management Science, 44: 1650–1661.
- Wilkie, A.D. (1986): A stochastic investment model for actuarial use, Transactions of the Faculty of Actuaries 39: 341–403.
- Wilkie, A.D. (1995): More on a stochastic asset model for actuarial use, British Actuarial Journal 1: 777–964.