ELÄKETURVAKESKUKSEN
KÄSIKIRJOJA

01
2018

Pääoma-arvokertoimet

SERGEI LAHTI
SARI TORO

ELÄKETURVAKESKUKSEN
KÄSIKIRJOJA

01
2018

Pääoma-arvokertoimet

SERGEI LAHTI
SARI TORO

Eläketurvakeskus
00065 ELÄKETURVAKESKUS
Puhelin 029 411 20 • Faksi 09 148 1172

Pensionsskyddscentralen
00065 PENSIONSSKYDDSCENTRALEN
Telefon 029 411 20 • Fax 09 148 1172

Finnish Centre for Pensions
FI-00065 Eläketurvakeskus Finland
Phone +358 29 411 20 • Fax +358 9 148 1172

Juvenes Print – Suomen Yliopistopaino Oy
Helsinki 2018

ISBN 978-951-691-287-8 (nid.)
ISBN 978-951-691-288-5 (PDF)

ISSN 1795-9578 (painettu)
ISSN 1798-7504 (verkkojulkaisu)

LUKIJALLE

Pääoma-arvokertoimet-käsikirjassa esitellään eläkevakuutuksissa käytettäviä pääoma-arvokertoimia. Pääoma-arvokertoimia tarvitaan vakuutusmatemaattisissa laskelmissa ennakkoon rahastoitavan maksun määrittämisessä, vastuuvelan laskennassa, kertasuoritus- ja muuntokertoimia laskennassa sekä eläkevaroja siirrettäessä eläkejärjestelmästä toiseen.

Tämän kirjan ensimmäinen painos julkaistiin Eläketurvakeskuksen käsikirjoja -sarjassa vuonna 2011. Kirjan kirjoittivat Jaakko Aho ja Mikko Sankala, ja se korvasi aiemmin ETK:n julkaisemat painetut pääoma-arvokertoimien taulustokokoelmat.

Ensimmäisen painoksen jälkeen on astunut voimaan vuoden 2017 lakimuutoksiin perustuva eläkeuudistus, jonka osana oli pääoma-arvokertoimien laskennan kannalta merkittävä kuolevuusperusteen muutos. Sosiaali- ja terveysministeriö vahvisti uudeksi yksityisten alojen mukaisen eläkevakuutuksen kuolevuusperusteeksi kaksiosaisen kuolevuusmallin 31.12.2016 alkaen. Muutoksen seurauksena pääoma-arvokertoimet laskettiin uudestaan ja tuli myös tarve päivittää tämä kirja.

Kirjan uudistettu painos on Sergei Lahden ja Sari Toron käsialaa. Kun siirryttiin kaksiosaiseen kuolevuusperusteeseen, etenkin diskonttaus- ja kommutaatiofunktioiden laskenta muuttui merkittävästi. Tämä vaikutti vanhuuseläkkeiden, perhe-eläkkeiden ja hautausavustusten pääoma-arvokertoimiin. Vastaisten perhe-eläkkeiden osalta myös pääoma-arvokertoimien laskentakaavat muuttuivat. Kirjan uudistettu painos ei enää sisällä vastaisten puolikollektiivisten perhe-eläkkeiden laskentakaavoja, koska näitä ei tarvita työeläkejärjestelmässä ja koska näiden kaavat eivät entisellään toimi kaksiosaisen kuolevuusmallin tapauksessa. Kuolevuusmallin muutos ei vaikuttanut työkyvyttömyyseläkkeiden pääoma-arvokertoimiin.

Kirjassa esitetyt pääoma-arvokertoimien kaavat pätevät sekä yksiosaisen että kaksiosaisen kuolevuusmallin tapauksessa, ellei muuta mainita. Kaksiosainen kuolevuusmalli ja siihen liittyvien kaavojen ja parametrien johtaminen esitetään Samu Salmisen Pro Gradu -tutkielmassa (Salminen 2015). Lisäksi tätä kirjaa kirjoitettaessa apuna on käytetty 1990-luvun vaihteessa kirjoitettua ohjetta, jota valmistelleessa työryhmässä oli edustajia eläkelaitoksista ja Eläketurvakeskuksesta.

Kirjassa pyritään käyttämään vakiintuneita merkintätapoja. Ajan ja iän yksikkönä käytetään vuotta ja ellei erikseen mainita, niin x tarkoittaa henkilön ikää ja

w eläkeikää. Työeläkejärjestelmässä eläkkeiden pääoma-arvokertoimet lasketaan olettaen, että suoritukset ovat jatkuvamaksuisia. Tällöin pääoma-arvokertoimien merkinnöissä käytetään yläviivaa. Poikkeukset ja muut merkinnät esitellään erikseen niitä käytettäessä.

Kirjan alussa esitellään uusi kuolevuusfunktio ja muut pääoma-arvokertoimien laskentaan tarvittavat perusfunktiot. Tämän jälkeen esitellään diskonttaus- ja kommutaatiofunktiot. Itse pääoma-arvokertoimien laskeminen esitellään eläkelajeittain. Mukana ovat vanhuus-, työkyvyttömyys- ja perhe-eläkkeet sekä hautausavustus. Kussakin kohdassa esitellään ensin vastaisten eli tulevaisuudessa mahdollisesti alkavien ja sitten alkaneiden eläkkeiden pääoma-arvokertoimet.

Uudistustyön yhteydessä kirjaan on lisätty uutta materiaalia. Nyt kirja sisältää myös ohjeet pääoma-arvokertoimien interpolointiin ja rahastoitujen vanhuuseläkkeiden muuntoon. Lisäksi kirjan liitteisiin on lisätty työntekjän eläkelain mukaisen eläkevakuutuksen kuolevuusperusteen historiakatsaus.

Pääoma-arvokertoimien käytön havainnollistamiseksi kirjan loppupuolella on esimerkkilaskelmia. Esimerkeissä käytetään työntekijän eläkelain mukaisessa eläkevakuutuksessa sovellettavia pääoma-arvokertoimia, vaikka kaikki esimerkkien tilanteet eivät tulekaan sovellettaviksi työntekijän eläkelain mukaisissa vakuutuksissa. Kirjan teoriaosuudesta poiketen esimerkeissä tuodaan näkyviin diskonttaus- ja kommutaatiolukuihin tehtävät ikäsiirrot. Lukijaa varten esimerkkien laskennan helpottamiseksi kirjan liitteissä taulukoidaan esimerkeissä tarvittavia pääoma-arvokertoimia. Kattavampi kokoelma pääoma-arvokerrointaulukoista löytyy Eläketurvakeskuksen ylläpitämästä tilastotietokannasta (http://tilastot.etk.fi).

Kirjan uudistustyössä olemme saaneet lukuisia neuvoja ja kommentteja Jaakko Aholta. Kiitämme kommenteista myös Mikko Sankalaa, Hannu Sihvosta ja Ismo Riskua. Lämpimät kiitokset myös Merja Raunikselle taittoon liittyvästä opastuksesta. Olemme kirjoittaneet kirjan LaTeX-ladontaohjelmaa käyttäen ja teknisistä neuvoista olemme kiitollisia internetin palstoilla tietojaan jakaville aktiivisille tuntemattomiksi jääneille henkilöille.

Helsingissä maaliskuussa 2018
Sergei Lahti ja Sari Toro

SISÄLTÖ

1 Johdanto

Suomessa työnteko kartuttaa lakisääteistä työeläkettä. Eläkkeiden kustantamista varten työeläkelaitokset keräävät vakuutusmaksuja, joilla katetaan maksussa olevia eläkkeitä ja mahdollisesti varaudutaan tulevien eläkkeiden kustantamiseen. Erityisesti ennakkoon rahastoitavan maksun määrittämiseen ja vastuuvelan laskemiseen tarvitaan menetelmiä, jotka työeläkejärjestelmässä perustuvat henkivakuutusmatematiikkaan ja sen pääoma-arvokertoimiin. Pääoma-arvokertoimet kuvaavat tulevien maksusuoritusten odotusarvoja diskontattuna nykyhetkeen.

Pääoma-arvokertoimien laskenta perustuu vuonna 1962 sosiaali- ja terveysministeriön vahvistamaan työntekijäin eläkelain mukaisen vakuutuksen laskuperustemalliin, jossa on määrätty laskuperusteiden matemaattinen muoto. Laskuperustemallia rakennettaessa periaatteina oli, että se soveltuisi likipitäen kaikkeen eläkevakuutukseen, että perustetasoa olisi mahdollisimman yksinkertaista tarkistaa ja että laskuperustemallista saataisiin kaikki eläke- ja henkivakuutustoimintaan tarvittavat laskuperusteet määräämällä parametrit kulloinkin esiintyvää tarvetta vastaavasti (Laskuperustemalli 1962). Myöhemmin laskuperustemallin käyttöala täsmentyi tosin suppeammaksi, kuin alunperin suunniteltiin.

Laskuperustemalli määrittelee perusfunktiot, joita tarvitaan pääoma-arvokertoimien laskennassa. Perusfunktiot ovat analyyttisia lausekkeita muun muassa korkoutuvuudelle tai todennäköisyydelle kuolla tai tulla työkyvyttömäksi. Diskonttaus- ja kommutaatiofunktiot ovat taas teknisiä apuvälineitä, jotka tehostavat kuolevuuteen liittyvien pääoma-arvokertoimien laskentaa.

Laskuperustemalli sisältää myös perusfunktioiden laskennassa tarvittavia parametreja eli yleisvakioita ja erikoisvakioita. Yleisvakioiden arvojen on ajateltu olevan stabiileja tai sellaisia, että niiden muuttamiseen on tarvetta hyvin harvoin. Erikoisvakioiden arvoja muutetaan useammin. Erikoisvakioiden arvoja muuttamalla laskuperustemallista saadaan eri vakuutusmuotoihin ja käyttötarkoituksiin sopivat laskuperusteet.

Pääoma-arvokertoimia laskettaessa tarvitaan käsitys kuolevuudesta. Työntekijän eläkelain mukaisessa eläkevakuutuksessa käytössä oleva kuolevuusperuste perustuu Gompertz-kuolevuusmalliin. Parametrit on määritelty siten, että kuolevuusperuste kuvaa havaittua kuolevuutta. Mallin ja parametrien valinnalla on merkitystä eläkkeiden rahastointiin, jolla varaudutaan nykyisten ja tulevien eläkkeiden suorituksiin. Kuolevuusperusteen osuvuutta seurataan vuosittain muun muassa vertaamalla todellisesti ja kuolevuusperusteen mukaan kuolleilta henkilöiltä vapautuneita vanhuuseläkevastuita. Mikäli vastuut poikkeavat toisistaan merkittävästi, tulee tarve päivittää kuolevuusperustetta.

Kuolevuusperustetta on muutettu aika ajoin johtuen havaitun kuolevuuden kehityksen muutoksista. Viimeisimmässä eli 31.12.2016 voimaan astuneessa perustemuutoksessa parametrien lisäksi muuttui koko kuolevuusmalli. Työeläkejärjestelmässä aiemmin käytössä ollut yksiosainen Gompertz-kuolevuusmalli korvattiin kahdesta erillisestä Gompertz-mallin mukaisesta kuolevuusfunktiosta muodostetulla kaksiosaisella kuolevuusmallilla. Selvitysten (mm. Salminen 2015) mukaan kaksiosainen kuolevuusperuste kuvaisi eri i'issä havaittua kuolevuutta yksiosaista kuolevuusperustetta paremmin.

Uuden kuolevuusmallin seurauksena myös pääoma-arvokertoimien laskentakaavat ovat muuttuneet. Kaksiosaisen kuolevuusmallin tapauksessa pääoma-arvokertomet voidaan laskea vaiheittain. Ensin lasketaan kaksiosaisen kuolevuusmallin kumpaakin eri osaa vastaavien yksiosaisten kuolevuusmallien mukaiset pääoma-arvokertoimet. Tämän jälkeen yksiosaisten kuolevuusmallien mukaisten pääoma-arvokertoimien tulokset yhdistetään tässä kirjassa esitettyjen laskentakaavojen mukaisesti. Laskentakaavat voidaan johtaa yleisten integrointisääntöjen avulla.

2 Perusfunktiot

Tässä luvussa esitellään perusfunktioita, joita tarvitaan pääoma-arvokertoimia määrättäessä. Funktiot perustuvat Suomessa eläkevakuutuksessa yleisesti käytössä olevaan laskuperustemalliin. Perusfunktioiden avulla otetaan käyttöön tarvittavat todennäköisyydet ja korkoutuvuus. Tässä luvussa käytetyt yleisvakiot $a_{i,j}$ ja a_j sekä erikoisvakiot b_j on lueteltu liitteessä A.

2.1 Korkoutuvuus

Pääoma-arvokertoimia laskettaessa käytetään jatkuvaa korkoutuvuutta

$$\delta = \ln(1+i), \tag{2.1}$$

missä i on käytettävä vuosikorko. Funktion käyttöä voidaan havainnollistaa lausekkeella

$$e^{-\int_x^t \delta \, \mathrm{d}s} = (1+i)^{-(t-x)}, \tag{2.2}$$

joka kuvaa diskonttaustekijää tapauksessa, jossa x-ikäisen henkilön tuleva iässä t tapahtuva maksusuorite diskontataan korolla i nykyhetkeen.

Korkoutuvuuden valinnassa huomioidaan vakuutuksessa tehtävä sijoitustoiminta ja mahdolliset etuuksiin tulevat tasokorotukset. Työntekijän eläkelain mukaisessa vakuutuksessa vuosikorossa $i = 3{,}00$ % otetaan huomioon sekä perustekorkokanta että rahanarvon muuttuvuus.

2.2 Kuolevuus

Pääoma-arvokertoimia laskettaessa tarvitaan käsitys kuolevuudesta eli elossa olevien vakuutettujen todennäköisyydestä kuolla. Suomessa eläkevakuutuksessa käytössä oleva kuolevuus perustuu Gompertz-kuolevuusmalliin (Pesonen ym. 2000). Laskuperusteissa kuolevuus määritellään iästä x riippuvana kuolevuusintensiteetin funktiona muodossa

$$\mu_x = a_1 e^{a_2(x+b_2)}, \tag{2.3}$$

missä $a_1 > 0$ ja $a_2 > 0$ ovat kuolevuuden yleistä tasoa ja muotoa määrittelevät vakiot ja b_2 on henkilön kuolevuutta säätelevä parametri eli niin sanottu ikäsiirto.

Funktion μ_x käyttöä voidaan havainnollistaa lausekkeella

$$e^{-\int_x^t \mu_s \,\mathrm{d}s}, \tag{2.4}$$

joka kuvaa todennäköisyyttä, että x-ikäinen henkilö on elossa iässä t, kun $x \leq t$.

Gompertz-kuolevuusmalliin perustuva malli on teknisesti helposti hallittavissa. Esimerkiksi ikäsiirron b_2 arvoa muuttamalla voidaan saada sukupolvien, sukupuolten tai toisistaan poikkeavien vakuutuskantojen väliset erot huomioitua.

Gompertz-kuolevuusmalliin perustuva kuolevuusfunktio μ_x soveltuu erityisesti vanhuus- ja perhe-eläkkeisiin. Työkyvyttömyyseläkkeiden pääoma-arvokertoimien laskennassa kuolevuudella on vähäisempi merkitys ja työntekijän eläkelain mukaisessa eläkevakuutuksessa laskutekniikkaa on yksinkertaistettu käyttämällä vakiokuolevuutta $\mu_x = a_4$.

Kuolevuusmalli ja parametrit pyritään määrittelemään siten, että kuolevuusperuste vastaa havaittua kuolevuutta mahdollisimman tarkasti. Havaitun kuolevuuden kehityksen muutoksista johtuen kuolevuusperustetta on muutettu aika ajoin. Työntekijän eläkelain mukaisessa eläkevakuutuksessa käytetyn kuolevuusperusteen muutokset esitetään liitteessä B. Työeläkejärjestelmässä käytettiin edellä määritellyn funktion μ_x mukaista yksiosaista kuolevuusmallia kunnes 31.12.2016 alkaen otettiin käyttöön kaksiosainen kuolevuusmalli, joka kuvaa paremmin eri i'issä havaittua kuolevuutta (Salminen 2015).

2.2.1 Kaksiosainen kuolevuusmalli

Tässä kirjassa kaksiosainen kuolevuusmalli esitetään työntekijän eläkelain mukaisen eläkevakuutuksen laskuperusteista poiketen muodossa

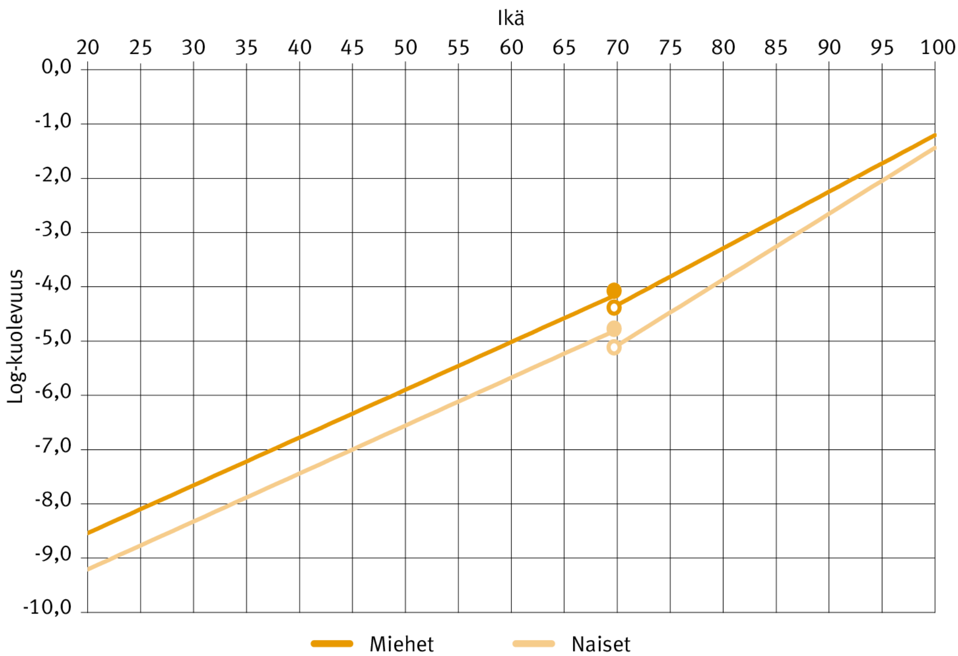
$$\mu_x = \begin{cases} \mu_{1,x} = a_{1,1} e^{a_{1,2}(x+b_2)}, & \text{kun } (x+b_2) \leq k \\ \mu_{2,x} = a_{2,1} e^{a_{2,2}(x+b_2)}, & \text{kun } (x+b_2) > k, \end{cases} \tag{2.5}$$

missä $a_{i,1} > 0$ ja $a_{i,2} > 0$, $i \in \{1,2\}$, ovat vakioita, b_2 on ikäsiirto ja k on funktion μ_x nivelkohta eli rajaikä. Vakiot $a_{i,j}$ riippuvat henkilön sukupuolesta, ja se, kumpaa funktiota käytetään, $\mu_{1,x}$ vai $\mu_{2,x}$, riippuu ikäsiirretystä iästä $x + b_2$.

Kaksiosaisen kuolevuusmallin tapauksessa funktio μ_x määräytyy siis kahden Gompertz-kuolevuusmalliin perustuvan funktion $\mu_{1,x}$ ja $\mu_{2,x}$ avulla, ja se on paloittain jatkuva ja paloittain integroituva. Funktion μ_x ainoa epäjatkuvuuskohta on rajaiässä k.

Funktiota μ_x on usein kätevä tarkastella logaritmiasteikolla. Kaksiosaisen kuolevuusmallin tapauksessa logaritmoidun funktion $\ln(\mu_x)$ kulmakerroin muuttuu rajaiässä k. Tämä voidaan havaita kuviossa 2.1.

Kuvio 2.1.
Logaritmoitu kaksiosainen kuolevuusfunktio $\ln(\mu_x)$ *iän ja sukupuolen mukaan ikäsiirrolla* $b_2 = 0$. *Kuolevuusfunktion kulmakerroin muuttuu jyrkemmäksi rajaiässä* $k = 70$.



2.3 Työkyvyttömyys

Työkyvyttömyyseläkkeiden pääoma-arvokertoimien laskennassa käytetään niin sanottua Z-mallia (Tuomikoski ym. 2007, Turtiainen ym. 1982). Siinä perusobjektina olevan funktion z integraali

$$\int_{u_1}^{u_2} z(x,u)\, \mathrm{d}u \tag{2.6}$$

antaa todennäköisyyden tapaukselle, että vastasyntynyt on elossa ajan x kuluttua ja on tällöin ollut yhdenjaksoisesti työkyvytön ikävälillä $[u_1, u_2]$.

Kun ψ on lyhin huomioonotettava työkyvyttömyyden kesto, niin arvoilla $x \geq u \geq \psi$ funktio z määritellään

$$z(x,u) = \sum_{j=0}^{2} b_{3+j}\, a_{5+j}\, e^{b_{6+j}\, a_{8+j}\, x - a_{11+j}\, u}. \tag{2.7}$$

Työkyvyttömyyden keston alarajan ψ alapuolella funktiota z ei määritellä, vaan tyydytään ainoastaan edellyttämään, että vastasyntynyt on elossa iässä x, jolloin funktio z toteuttaa ehdon

$$\int_{0}^{x} z(x,u)\, \mathrm{d}u = e^{-a_4 x}, \tag{2.8}$$

missä sovelletaan vakiokuolevuutta $\mu_x = a_4$.

Z-mallista johdettu työkyvyttömyyden kesto on sekoitus kolmesta eksponenttijakaumasta. Funktio z siten määritellään kolmen termin summalausekkeena (2.7), jossa ensimmäinen termi vastaa lyhyitä, toinen pitkiä ja kolmas keskipitkiä työkyvyttömyyskestoja.

Funktiosta z johdettu työkyvyttömyysintensiteetti kuvaa todennäköisyyttä, jolla x-ikäinen henkilö siirtyy työkyvyttömäksi iässä x. Työkyvyttömyysintensiteetti lasketaan ehdollisen todennäköisyyden kaavalla

$$\frac{z(x,\psi)}{e^{-a_4 x} - \int_{\psi}^{x} z(x,u)du}, \tag{2.9}$$

missä nimittäjänä oleva lauseke kuvaa todennäköisyyttä, että henkilö on elossa iässä x ja on ollut työkykyinen ikävälillä $[\psi, x]$, $u > \psi$ (Turtiainen ym. 1982 s. 48).

2.4 Avioisuus

Naimisissa olevien miesten suhteellinen määrä iän funktiona lasketaan kaavalla

$$n_x(M) = a_{34}\, e^{-a_{35}(\ln x - a_{36})^4}\left(1 + a_{37}\, e^{-\left(\frac{x-a_{38}}{10}\right)^2}\right) \tag{2.10}$$

ja naimisissa olevien naisten suhteellinen määrä kaavalla

$$n_x(N) = a_{39}\, e^{-a_{40}(\ln x - a_{41})^4}\left(1 + a_{42}\, e^{-\left(\frac{x-a_{43}}{10}\right)^2}\right). \tag{2.11}$$

2.5 Aviopuolison ikä

Keskimääräinen vaimon ikä miehen iän funktiona lasketaan kaavalla

$$y_x(M) = a_{44}x + a_{45} \tag{2.12}$$

ja keskimääräinen miehen ikä vaimon iän funktiona kaavalla

$$y_x(N) = a_{46}x + a_{47}. \tag{2.13}$$

2.6 Alkavan lapseneläkkeen pääoma-arvo

Kun naisen ikä kuolinhetkellä on x ja lapseneläkkeen pääteikä on w, niin naisen jälkeen maksettavan alkavan lapseneläkkeen pääoma-arvo lasketaan kaavalla

(2.14)

$$\bar{Z}_x(w,N) = \begin{cases} a_{52}(x-17)^2 10^{-a_{53}(x-17)^2}, & \text{kun } w = 18 \text{ ja } 17 < x \le a_{50} + w \\ a_{54}(x-17)^2 10^{-a_{55}(x-17)^2}, & \text{kun } w = 21 \text{ ja } 17 < x \le a_{50} + w \\ a_{56}(x-17)^2 10^{-a_{57}(x-17)^2}, & \text{kun } w = 24 \text{ ja } 17 < x \le a_{50} + w \\ 0, & \text{kun } x \le 17 \text{ tai } x > a_{50} + w. \end{cases}$$

Funktion arvo kuvaa tuloa, jossa yhtenä tekijänä on todennäköisyys, että vakuutetun kuollessa iässä x vakuutukselle löytyy lapseneläkkeensaajia. Tulon toisena tekijänä on lapseneläkkeensaajille syntyneiden eläkkeiden sen hetkisten pääoma-arvojen summa. Kun naisen ikä on alle 18 tai yli $a_{50} + w$ vuotta, niin lapseneläkkeensaajien lukumäärän oletetaan olevan nolla.

Yleisvakioiden $a_{52}, \ldots, a_{57}$ arvoja eri korkokannoille on taulukoitu liitteessä A.1. Muita korkokantoja vastaavat lapseneläkkeen pääoma-arvot voidaan laskea taulukoituja korkokantoja vastaavista suureista $\bar{\bar{Z}}_x$ lineaarisesti interpoloimalla.

Miehen jälkeen maksettavan alkavan lapseneläkkeen pääoma-arvo $\bar{\bar{Z}}_x(w, M)$ saadaan verrannosta

$$\frac{\bar{\bar{Z}}_x(w,M)}{n_x(M)} = \frac{\bar{\bar{Z}}_{y_x(M)}(w,N)}{n_{y_x(M)}(N)}. \tag{2.15}$$

3 Diskonttaus- ja kommutaatiofunktiot

Diskonttaus- ja kommutaatiofunktiot ovat teknisiä apuvälineitä, joiden avulla voidaan laskea kuolevuuteen liittyviä pääoma-arvokertoimia. Diskonttauksessa otetaan huomioon koron i ja kuolevuuden μ_x yhteisvaikutus.

Tässä luvussa esitetyt funktiot on yksinkertaisuuden vuoksi määritelty ilman ikäsiirron b_2 huomioimista. Ikäsiirtojen käytöstä kerrotaan kohdassa 9. Funktioden ikäsiirtämättömät arvot on taulukoitu liitteessä D.

3.1 Funktio D_x

Kun $x \geq 0$, niin funktio D_x määritellään siten, että

$$D_x = e^{-\int_0^x (\mu_t + \delta)\,\mathrm{d}t}. \tag{3.1}$$

Funktio D_x kuvaa vastasyntyneen todennäköisyyttä olla elossa iässä x syntymähetkelle diskonttattuna. Lausekkeesta nähdään korkoutuvuuden δ ja kuolevuuden μ tekninen samankaltaisuus. Kun integraali kirjoitetaan auki, funktio D_x saadaan muotoon

$$D_x = e^{-\frac{\mu_x}{a_2} + \frac{\mu_0}{a_2} - \delta x}. \tag{3.2}$$

Kaksiosaisen kuolevuusmallin tapauksessa funktion D_x arvot lasketaan vaiheittain. Ensin lasketaan erikseen yksiosaisen mallin mukaiset $D_{1,x}$ ja $D_{2,x}$ edellä esitettyä määritelmää (3.1) käyttäen kaavalla

$$D_{i,x} = e^{-\int_0^x (\mu_{i,t} + \delta)\,\mathrm{d}t} = e^{-\frac{\mu_{i,x}}{a_{i,2}} + \frac{\mu_{i,0}}{a_{i,2}} - \delta x}, \quad i \in \{1,2\}. \tag{3.3}$$

Tämän jälkeen kaksiosaisen kuolevuusmallin lopullinen ikäsiirtämätön funktio D_x lasketaan edellä laskettujen funktioiden $D_{1,x}$ ja $D_{2,x}$ avulla kaavalla

$$D_x = \begin{cases} D_{1,x}, & \text{kun } x \leq k \\ D_{2,x} \frac{D_{1,k}}{D_{2,k}}, & \text{kun } x > k. \end{cases} \tag{3.4}$$

3.2 Funktio $\overline{N}_x$

Kun $x \geq 0$, niin funktio $\overline{N}_x$ määritellään siten, että

$$\overline{N}_x = \int_x^{\infty} D_t \, \mathrm{d}t. \tag{3.5}$$

Funktio kuvaa vastasyntyneelle laskettua iässä x alkavan elinikäisen yksikköeläkkeen syntymähetkeen diskontattujen korvausten yhteenlaskettua odotusarvoa.

Kaavan (3.5) integraali ei ratkea analyyttisin menetelmin, mutta sitä voidaan approksimoida numeerisesti liitteessä C esitetyn Simpsonin $1/3$-säännön avulla.

Seuraavaksi esitettävässä ratkaisuvaihtoehdossa sovelletaan Simpsonin $1/3$-sääntöä käyttäen askelvälinä yhtä vuotta. Tällöin kaksiosaisen kuolevuusmallin tapauksessa funktion $\overline{N}_x$ arvot lasketaan vaiheittain. Ensin lasketaan erikseen yksiosaisen kuolevuusmallin mukaiset $\overline{N}_{1,x}$ ja $\overline{N}_{2,x}$ edellä esitettyä määritelmää (3.5) käyttäen kaavalla

$$\overline{N}_{i,x} = \int_x^{\infty} D_{i,t} \, \mathrm{d}t, \; i \in \{1,2\}. \tag{3.6}$$

Kun x on välillä $[0,126]$ oleva parillinen kokonaisluku, niin Simpsonin 1/3-säännön avulla saadaan

$$\overline{N}_{i,x} \approx \sum_{j=0}^{\frac{126-x}{2}} \frac{1}{3}\Big(D_{i,x+2\cdot j} + 4\cdot D_{i,x+2\cdot j+1} + D_{i,x+2\cdot j+2}\Big) + \frac{D_{i,129}+D_{i,128}}{2},$$

ja kun x on välillä $[1,127]$ oleva pariton kokonaisluku, niin

$$\overline{N}_{i,x} \approx \sum_{j=0}^{\frac{127-x}{2}} \frac{1}{3}\Big(D_{i,x+2\cdot j} + 4\cdot D_{i,x+2\cdot j+1} + D_{i,x+2\cdot j+2}\Big).$$

Lisäksi ikää $x = 128$ vastaa approksimaatio $\overline{N}_{i,128} \approx \frac{D_{i,129}+D_{i,128}}{2}$, ja kun $x \geq 129$, niin $\overline{N}_{i,x} \approx 0$.

Tämän jälkeen kaksiosaisen kuolevuusmallin lopullinen ikäsiirtämätön funktio $\overline{N}_x$ lasketaan kaavoilla (3.3) ja (3.6) saatujen funktioiden $D_{1,x}$, $D_{2,x}$, $\overline{N}_{1,x}$ ja $\overline{N}_{2,x}$

avulla kaavalla

$$(3.7) \qquad \overline{N}_x = \begin{cases} \overline{N}_{1,x} - \overline{N}_{1,k} + \overline{N}_{2,k}\frac{D_{1,k}}{D_{2,k}}, & \text{kun } x \leq k \\ \overline{N}_{2,x}\frac{D_{1,k}}{D_{2,k}}, & \text{kun } x > k. \end{cases}$$

3.3 Funktio $\bar{a}_x$

Funktio $\bar{a}_x$ muodostetaan funktioiden $\overline{N}_x$ ja D_x avulla siten, että

$$(3.8) \qquad \bar{a}_x = \frac{\overline{N}_x}{D_x}.$$

Funktio kuvaa x-ikäisen henkilön maksussa olevan elinikäisen yksikköeläkkeen tulevien korvausten odotusarvoa diskontattuna nykyhetkeen.

Kaksiosaisen kuolevuusmallin tapauksessa funktion $\bar{a}_x$ arvot lasketaan suoraan kaavoilla (3.4) ja (3.7) saatujen lopullisten funtioiden D_x ja $\overline{N}_x$ avulla.

3.4 Funktio $\overline{M}_x$

Funktio $\overline{M}_x$ määritellään siten, että

$$(3.9) \qquad \overline{M}_x = \int_x^\infty D_t \mu_t \, \mathrm{d}t.$$

Funktio kuvaa vastasyntyneelle laskettua iän x jälkeisen yksikön suuruisen hautausavustuksen syntymähetkeen diskontattua odotusarvoa.

Derivoimalla funktiota D_x saadaan, että $D_x = -\int_x^\infty D_t' \, \mathrm{d}t = \int_x^\infty D_t(\mu_t + \delta) \, \mathrm{d}t$. Tällöin funktio $\overline{M}_x$ voidaan esittää muodossa

$$(3.10) \qquad \overline{M}_x = D_x - \delta \overline{N}_x.$$

Kaksiosaisen kuolevuusmallin tapauksessa funktion $\overline{M}_x$ arvot lasketaan suoraan kaavoilla (3.4) ja (3.7) saatujen lopullisten funtioiden D_x ja $\overline{N}_x$ avulla.

4 Vanhuuseläkkeiden pääoma-arvokertoimet

Vanhuuseläke voi olla joko elinikäinen, jolloin eläkettä maksetaan tietystä iästä aina vakuutetun kuolemaan saakka, tai määräaikainen, jolloin eläkettä maksetaan vain sovitulla ikävälillä vakuutetun ollessa elossa.

Vanhuuseläkkeiden pääoma-arvokertoimia tarvitaan varauduttaessa vastaisten ja alkaneiden vanhuuseläkkeiden tuleviin suorituksiin. Lisäksi vanhuuseläkkeen pääoma-arvokertoimia voidaan käyttää muun muassa eläkkeen määrän laskemiseen tai muuntamiseen, joista on esimerkit kohdissa 10.7 ja 10.8.

Kaavoja (4.2)–(4.5) käytetään pääoma-arvokertoimien laskemiseen sekä yksiosaisen että kaksiosaisen kuolevuusmallin tapauksessa.

4.1 Vastaiset vanhuuseläkkeet

Vastaisella vanhuuseläkkeellä tarkoitetaan vanhuuseläkettä, joka ei ole vielä alkanut.

4.1.1 Vastainen elinikäinen vanhuuseläke

Kun x on henkilön ikä, w on eläkeikä ja kun $x < w$, niin vastaisen elinikäisen vanhuuseläkkeen pääoma-arvokerroin määritellään

$$\bar{A}^V_{x:w} = \int_w^\infty e^{-\int_x^t \mu_s \, \mathrm{d}s} e^{-\int_x^t \delta \, \mathrm{d}s} \, \mathrm{d}t = \frac{1}{D_x} \int_w^\infty D_t \, \mathrm{d}t. \tag{4.1}$$

Integraalin sisällä oleva ensimmäinen eksponenttifunktio kuvaa todennäköisyyttä, että henkilö on elossa iässä t ja toisella eksponenttifunktiolla diskontataan iässä t maksettava eläke laskentahetkeen. Jos $x \geq w$, niin pääoma-arvokerroin lasketaan ikään kuin vastainen vanhuuseläke tulisi heti maksettavaksi eli vastaavasti kuin yllä oleva, mutta integroitava väli on $[x, \infty)$.

Vastaisen elinikäisen vanhuuseläkkeen pääoma-arvokerroin voidaan esittää myös muodossa

$$\bar{A}^V_{x:w} = \begin{cases} \frac{\bar{N}_w}{D_x}, & \text{kun } x < w \\ \bar{a}_x, & \text{kun } x \geq w. \end{cases} \tag{4.2}$$

Vanhuuseläkkeelle siirtymistä lykättäessä (eli kun $x > w$) eläkkeen määrää saatetaan muuttaa esimerkiksi siten, että etuuden pääoma-arvo säilyy. Eläkkeiden muuntaminen esitetään luvussa 8 ja kohdan 10.7 esimerkeissä.

4.1.2 Vastainen määräaikainen vanhuuseläke

Vastaisen määräaikaisen vanhuuseläkkeen pääoma-arvokerroin lasketaan kaavalla (4.1), jossa integroimisväli muutetaan siten, että integroidaan eläkkeen alkamisiästä päättymisikään saakka. Tämä vastaa kahden elinikäisen vanhuuseläkkeen pääoma-arvokertoimen erotusta.

Kun x on henkilön ikä, w_1 on määräaikaisen vanhuuseläkkeen alkamisen tavoiteikä ja w_2 on määräaikaisen vanhuuseläkkeen päättymisikä, niin vastaisen määräaikaisen vanhuuseläkkeen pääoma-arvokerroin lasketaan kaavalla

$$(4.3) \qquad \bar{A}^{V}_{x:[w_1,w_2]} = \begin{cases} \frac{\bar{N}_{w_1}}{D_x} - \frac{\bar{N}_{w_2}}{D_x}, & \text{kun } x < w_1 \\ \bar{a}_x - \frac{\bar{N}_{w_2}}{D_x}, & \text{kun } w_1 \leq x \leq w_2. \end{cases}$$

4.2 Alkaneet vanhuuseläkkeet

Alkaneella vanhuuseläkkeellä tarkoitetaan vanhuuseläkettä, joka on jo maksussa.

4.2.1 Alkanut elinikäinen vanhuuseläke

Alkanut elinikäinen vanhuuseläke muodostetaan kuten vastainen elinikäinen vanhuuseläke.

Kun x on henkilön ikä, niin alkaneen elinikäisen vanhuuseläkkeen pääoma-arvokerroin voidaan esittää muodossa

$$(4.4) \qquad \bar{A}^{VA}_{x} = \bar{a}_x.$$

Vanhuuseläkkeelle siirtymistä lykättäessä (eli kun $x > w$) tai varhennettaessa ($x < w$) eläkkeen määrää saatetaan muuttaa esimerkiksi siten, että etuuden pääoma-arvo säilyy. Eläkkeiden muuntaminen esitetään luvussa 8 ja kohdan 10.7 esimerkeissä.

4.2.2 Alkanut määräaikainen vanhuuseläke

Alkanut määräaikainen vanhuuseläke muodostetaan kuten vastainen määräaikainen vanhuuseläke.

Kun $x \leq w$, missä x on henkilön ikä ja w on määräaikaisen vanhuuseläkkeen päättymisikä, niin alkaneen määräaikaisen vanhuuseläkkeen pääoma-arvokerroin lasketaan kaavalla

$$\bar{A}^{VA}_{x:w} = \bar{a}_x - \frac{\overline{N}_w}{D_x}. \tag{4.5}$$

5 Työkyvyttömyyseläkkeiden pääoma-arvokertoimet

Työkyvyttömyyseläkkeiden pääoma-arvokertoimia tarvitaan varauduttaessa vastaisten ja alkaneiden työkyvyttömyyseläkkeiden tuleviin suorituksiin.

5.1 Vastainen työkyvyttömyyseläke

Vastaisella työkyvyttömyyseläkkeellä tarkoitetaan työkyvyttömyyseläkettä, joka ei ole vielä alkanut.

Kun x on henkilön ikä, w on vanhuuseläkeikä ja $x < w$, niin vastaisen työkyvyttömyyseläkkeen pääoma-arvokerroin määritellään

$$(5.1) \qquad {}_{(\psi)}\bar{A}^{I}_{x:w} = \int_{x+\psi}^{w} \int_{\psi}^{t-x} \frac{z(t,u)}{e^{-a_4 x}}\, \mathrm{d}u\, e^{-\int_x^t \delta\, \mathrm{d}s}\, \mathrm{d}t,$$

missä sisemmässä integraalissa oleva osamäärä kuvaa todennäköisyyttä, että henkilö on iässä t ollut työkyvytön ajan u ja ulommassa integraalissa olevalla eksponenttifunktiolla diskontataan iässä t maksettavat välin $[\psi, t-x]$ kestoiset eläkkeet laskentahetkeen. Alle ajan ψ kestäviä työkyvyttömyyksiä ei huomioida.

Kun pääoma-arvokertoimen lauseke integroidaan, saadaan

$$(5.2) \qquad {}_{(\psi)}\bar{A}^{I}_{x:w} = \sum_{j=0}^{2} b_{3+j} D_j(x) \Big(C_j(w-x)\left[B_j(\psi) - B_j(w-x)\right] - \frac{1}{c_j}\left[E_j(\psi) - E_j(w-x)\right] \Big),$$

missä

$$
\begin{aligned}
B_j(s) &= \frac{a_{5+j}}{a_{11+j}} e^{-a_{11+j}s} \\
C_j(s) &= \frac{1}{c_j} e^{c_j s} \\
D_j(s) &= e^{(c_j+\delta+a_4)s} \\
E_j(s) &= \frac{a_{5+j}}{d_j} e^{-d_j s} \\
c_j &= b_{6+j} a_{8+j} - \delta \\
d_j &= a_{11+j} - c_j.
\end{aligned}
$$

Kun $x \geq w$, niin määritellään, että ${}_{(\psi)}\bar{A}^{I}_{x:w} = 0$.

5.2 Alkanut työkyvyttömyyseläke

Alkaneella työkyvyttömyyseläkkeellä tarkoitetaan työkyvyttömyyseläkettä, joka on jo maksussa.

Kun x on työkyvyttömyyseläkkeellä olevan henkilön ikä, w on vanhuuseläkeikä ja kun työkyvyttömyys on jatkunut yhdenjaksoisena iästä v lähtien, niin alkaneen työkyvyttömyyseläkkeen pääoma-arvokerroin määritellään

$$
(5.3) \qquad \bar{A}^{IA}_{(v)+(x-v):w} = \int_x^w \frac{z(t,t-v)}{z(x,x-v)} e^{-\int_x^t \delta \, \mathrm{d}s} \, \mathrm{d}t,
$$

missä integraalin sisällä oleva osamäärä kuvaa todennäköisyyttä, että henkilö on edelleen työkyvytön iässä t ja eksponenttifunktiolla diskontataan iässä t maksettava eläke laskentahetkeen.

Kun pääoma-arvokertoimen lauseke integroidaan, saadaan

$$
(5.4) \qquad \bar{A}^{IA}_{(v)+(x-v):w} = \frac{\sum_{j=0}^{2} b_{3+j} A_j(v) \left[E_j(x) - E_j(w)\right]}{\sum_{j=0}^{2} b_{3+j} d_j A_j(v) E_j(x)},
$$

missä

$$
\begin{aligned}
A_j(s) &= e^{a_{11+j}s} \\
E_j(s) &= \frac{a_{5+j}}{d_j} e^{-d_j s} \\
c_j &= b_{6+j} a_{8+j} - \delta \\
d_j &= a_{11+j} - c_j.
\end{aligned}
$$

Alkaneen työkyvyttömyyseläkkeen pääoma-arvokertoimelle käytetään usein myös merkintää $\bar{a}^{\overline{ii|i}}_{(v)+(x-v):w}$.

6 Perhe-eläkkeiden pääoma-arvokertoimet

Perhe-eläkkeellä voidaan tarjota taloudellista turvaa vakuutetun leskelle, lapsille tai sekä leskelle että lapsille vakuutetun menehtyessä.

Perhe-eläkkeiden pääoma-arvokertoimia tarvitaan varauduttaessa vastaisten ja alkaneiden perhe-eläkkeiden tuleviin suorituksiin. Vakuutettujen joukosta riippuen varautuminen voi olla joko puolikollektiivista, jolloin vakuutusmaksuja peritään vain naimisissa olevilta, tai täyskollektiivista, jolloin vakuutusmaksuja peritään kaikilta. Tässä kirjassa esitellään vain täyskollektiivisten perhe-eläkkeiden pääoma-arvokertoimia.

6.1 Vastaisten perhe-eläkkeiden pääoma-arvokertoimet

Vastaisella perhe-eläkkeellä tarkoitetaan perhe-eläkettä, joka ei ole vielä alkanut. Vastaisen perhe-eläkkeen pääoma-arvokerroin määritellään

$$
\begin{aligned}
\bar{A}_x^P &= \int_x^{\infty} e^{-\int_x^t \mu_s \,\mathrm{d}s} \mu_t F(t) e^{-\int_x^t \delta \,\mathrm{d}s} \,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{D_x} \int_x^{\infty} D_t \mu_t F(t) \,\mathrm{d}t,
\end{aligned}
\tag{6.1}
$$

missä x on edunjättäjän ikä laskentahetkellä ja tekijä $e^{-\int_x^t \mu_s \,\mathrm{d}s} \mu_t$ kuvaa todennäköisyyttä, että edunjättäjä kuolee iässä t. Funktio $F(t)$ on tulo, jossa yhtenä tekijänä on todennäköisyys, että vakuutetun kuollessa iässä t vakuutukselle löytyy edunsaajia. Tulon toisena tekijänä on edunsaajille syntyneiden eläkkeiden sen hetkisten pääoma-arvojen summa. Kaavan viimeisellä eksponenttifunktiolla diskontataan syntyneen perhe-eläkkeen pääoma-arvo laskentahetkeen.

Kaavan (6.1) integraali ei ratkea analyyttisin menetelmin, mutta sitä voidaan approksimoida numeerisesti liitteessä C esitetyn Simpsonin $1/3$-säännön avulla.

Seuraavaksi esitettävässä ratkaisuvaihtoehdossa sovelletaan Simpsonin $1/3$-sääntöä käyttäen askelvälinä yhtä vuotta. Tällöin kaksiosaisen kuolevuusmallin tapauksessa perhe-eläkkeen pääoma-arvokertoimet $\bar{A}_x^P$ lasketaan vaiheittain. Ensin lasketaan erikseen yksiosaisen kuolevuusmallin mukaiset pääoma-arvokertoimet

$\bar{A}^P_{1,x}$ ja $\bar{A}^P_{2,x}$ edellä esitettyä määritelmää (6.1) käyttäen kaavalla

$$\bar{A}^P_{i,x} = \frac{1}{D_{i,x}} \int_x^\infty D_{i,t}\,\mu_{i,t}\,F(t)\,\mathrm{d}t,\ i \in \{1,2\}. \tag{6.2}$$

Funktio $F(t)$ ei riipu kaksiosaisen kuolevuusmallin nivelkohdasta k. Merkitään, että $f(i,t) = D_{i,t}\,\mu_{i,t}\,F(t)$, $i \in \{1,2\}$. Kun x on välillä $[0,126]$ oleva parillinen kokonaisluku, niin Simpsonin 1/3-säännön avulla saadaan

$$\bar{A}^P_{i,x} \approx \frac{1}{D_{i,x}} \left(\sum_{j=0}^{\frac{126-x}{2}} \frac{1}{3}\Big(f(i,x+2\cdot j) + 4\cdot f(i,x+2\cdot j+1) + f(i,x+2\cdot j+2) \Big) + \frac{f(i,129)+f(i,128)}{2} \right),$$

ja kun ikä x on välillä $[1,127]$ oleva pariton kokonaisluku, niin

$$\bar{A}^P_{i,x} \approx \frac{1}{D_{i,x}} \left(\sum_{j=0}^{\frac{127-x}{2}} \frac{1}{3}\Big(f(i,x+2\cdot j) + 4\cdot f(i,x+2\cdot j+1) + f(i,x+2\cdot j+2) \Big) \right).$$

Lisäksi ikää $x = 128$ vastaa approksimaatio $\bar{A}^P_{i,128} \approx \frac{1}{D_{i,128}} \cdot \frac{f(i,129)+f(i,128)}{2}$, ja kun $x \geq 129$, niin $\bar{A}^P_{i,x} \approx 0$.

Tämän jälkeen kaksiosaisen kuolevuusmallin lopulliset perhe-eläkkeen pääoma-arvokertoimet $\bar{A}^P_x$ lasketaan funktioiden $D_{1,x}$, $D_{2,x}$ ja kaavalla (6.2) saatujen yksiosaisen mallin mukaisten pääoma-arvokertoimien $\bar{A}^P_{1,x}$ ja $\bar{A}^P_{2,x}$ avulla kaavalla

$$\bar{A}^P_x = \begin{cases} \bar{A}^P_{1,x} - \frac{D_{1,k}}{D_{1,x}}\left(\bar{A}^P_{1,k} - \bar{A}^P_{2,k}\right), & \text{kun } x \leq k \\ \bar{A}^P_{2,x}, & \text{kun } x > k. \end{cases} \tag{6.3}$$

Seuraavissa kaavoissa käytettävät perusfunktiot $n_t(J)$, $y_t(J)$ ja $\bar{Z}_t(w,J)$ on määritelty kohdassa 2. Merkinnällä $J \in \{M,N\}$ tarkoitetaan edunjättäjän sukupuolta siten, että M tarkoittaa miespuolista ja N naispuolista edunjättäjää. Lisäksi kaavoissa esiintyy funktio $\bar{a}_x$, jonka sisään luvun x paikalle sijoitetaan aviopuolison ikää kuvaava funktio $y_t(J)$ eli funktio $y_t(M)$, jos edunjättäjänä on mies, ja funktio $y_t(N)$, jos edunjättäjänä on nainen. Mikäli $y_t(J)$ ei ole kokonaisluku, niin $\bar{a}_{y_t(J)}$ interpoloidaan kaavan (8.3) mukaisesti.

Vastaisen perhe-eläkkeen pääoma-arvokertoimia laskettaessa funktioissa D_x ja μ_x käytetään edunjättäjän ikäsiirtoa ja funktiossa $\bar{a}_{y_t(J)}$ edunsaajan ikäsiirtoa.

6.1.1 Vastainen leskeneläke

Vastaisen leskeneläkkeen tapauksessa funktio $F(t)$ määritellään tulona

$$F(t) = n_t(J)\bar{a}_{y_t(J)}, \tag{6.4}$$

ja pääoma-arvokerroin on tällöin muotoa

$$\bar{A}_x^{P_{leski}} = \frac{1}{D_x} \int_x^\infty D_t \, \mu_t \, n_t(J) \, \bar{a}_{y_t(J)} \, \mathrm{d}t. \tag{6.5}$$

Integraalia voidaan appoksimoida kohdassa 6.1 esitetyllä menettelyllä. Tällöin kaksiosaisen kuolevuusmallin tapauksessa funktio $f(i,t) = D_{i,t} \, \mu_{i,t} \, n_t(J) \, \bar{a}_{y_t(J)}$, $i \in \{1,2\}$.

6.1.2 Vastainen lapseneläke

Vastaisen lapseneläkkeen tapauksessa funktio $F(t)$ määritellään seuraavasti:

$$F(t) = \bar{Z}_t(w,J), \tag{6.6}$$

ja pääoma-arvokerroin on tällöin muotoa

$$\bar{A}_{x:w}^{P_{lapsi}} = \frac{1}{D_x} \int_x^\infty D_t \mu_t \bar{Z}_t(w,J) \, \mathrm{d}t. \tag{6.7}$$

Integraalia voidaan appoksimoida kohdassa 6.1 esitetyllä menettelyllä. Tällöin kaksiosaisen kuolevuusmallin tapauksessa funktio $f(i,t) = D_{i,t} \, \mu_{i,t} \, \bar{Z}_t(w,J)$, $i \in \{1,2\}$.

6.1.3 Vastainen perhe-eläke

Vastaisen perhe-eläkkeen tapauksessa funktio $F(t)$ määritellään seuraavasti:

$$F(t) = f \cdot n_t(J)\bar{a}_{y_t(J)} + \bar{Z}_t(w,J), \tag{6.8}$$

eli funktio $F(t)$ on summa vastaisen leskeneläkkeen ja vastaisen lapseneläkkeen tapauksista. Parametrin f avulla voidaan ottaa huomioon lasten vaikutus leskeneläkkeen määrään.

Vastaisen perhe-eläkkeen pääoma-arvokerroin on muotoa

$$_{(f)}\bar{A}^{P_1}_{x:w} = \frac{1}{D_x}\int_x^{\infty} D_t\,\mu_t\Big(f \cdot n_t(J)\bar{a}_{y_t(J)} + \bar{Z}_t(w,J)\Big)\,\mathrm{d}t. \tag{6.9}$$

Integraalia voidaan appoksimoida kohdassa 6.1 esitetyllä menettelyllä. Tällöin kaksiosaisen kuolevuusmallin tapauksessa funktio
$f(i,t) = D_{i,t}\,\mu_{i,t}\Big(f \cdot n_t(J)\bar{a}_{y_t(J)} + \bar{Z}_t(w,J)\Big)$, $i \in \{1,2\}$.

6.2 Alkaneiden perhe-eläkkeiden pääoma-arvokertoimet

Alkaneella perhe-eläkkeellä tarkoitetaan eläkettä, jossa edunjättäjä on kuollut ja eläke on maksussa edunsaajille. Useamman edunsaajan tapauksessa eläke jaetaan edunsaajien kesken laissa tai vakuutusehdoissa määrättyjen sääntöjen mukaisesti (ks. esim. TyEL 85 § ja 86 §).

6.2.1 Alkanut leskeneläke

Kun x on lesken ikä, niin alkaneen leskeneläkkeen pääoma-arvokerroin lasketaan kaavalla

$$\bar{A}^{PA_{leski}}_x = \bar{a}_x. \tag{6.10}$$

Kaavaa (6.10) käytetään pääoma-arvokertoimien laskemiseen sekä yksiosaisen että kaksiosaisen kuolevuusmallin tapauksessa.

6.2.2 Alkanut lapseneläke

Kun x on lapsen ikä, w on lapseneläkkeen pääteikä ja $x < w$, niin alkaneen lapseneläkkeen pääoma-arvokerroin lasketaan kaavalla

$$\bar{A}^{PA_{lapsi}}_{x:w} = \int_x^w e^{-\int_x^t 0\,\mathrm{d}s} e^{-\int_x^t \delta\,\mathrm{d}s}\,\mathrm{d}t = \frac{1-e^{-\delta(w-x)}}{\delta}. \tag{6.11}$$

Kyseistä pääoma-arvokerrointa kutsutaan myös aikakoroksi ja sille voidaan käyttää merkintää $\bar{a}_{\overline{w-x}|}$. Aikakorko vastaa määräaikaisen vanhuuseläkkeen pääoma-arvokerrointa vakiokuolevuudella $\mu_x = 0$.

Alkaneen lapseneläkkeen pääoma-arvokertoimen laskennassa voidaan käyttää myös työkyvyttömyyden kohdalla esiintynyttä vakiokuolevuutta $\mu_x = a_4$. Tällöin pääoma-arvokerroin lasketaan kaavalla

$$\bar{A}^{PA_{lapsi}}_{x:w} = \frac{1-e^{-(a_4+\delta)(w-x)}}{a_4+\delta}. \tag{6.12}$$

6.2.3 Alkanut perhe-eläke

Useamman edunsaajan tapauksessa alkaneen perhe-eläkkeen pääoma-arvo lasketaan käyttäen apuna perhe-eläkkeen perusteena olevaa vuosieläkettä E^P. Työeläkejärjestelmässä perhe-eläkkeen peruste määrätään edunsaajista riippumatta siten, että se vastaa suuruudeltaan lesken ja kahden lapsen saamaa yhteenlaskettua etuutta (ks. TyEL 84–86 §).

Kun edunsaajina on leski ja kaksi lasta, x on lesken ikä, x_1 ($< w$) on nuorimman lapsen ikä ja x_2 ($< w$) toiseksi nuorimman lapsen ikä, niin alkaneen perhe-eläkkeen pääoma-arvo saadaan lausekkeesta

$$E^P\left(C_0\bar{A}^{PA_{leski}}_{x} + C_1\bar{A}^{PA_{lapsi}}_{x_1:w} + C_2\bar{A}^{PA_{lapsi}}_{x_2:w}\right), \tag{6.13}$$

missä C_0 vastaa luvattua lesken osuutta eläkkeestä E^P ja C_1 sekä C_2 lasten osuuksia.

Edellä esitettyä laskentatapaa voidaan soveltaa myös muissa tapauksissa. Näin tehtynä, esimerkiksi lesken tai yhden lapsen tapauksessa päädytään samoihin pääoma-arvoihin kuin aiemmin kappaleissa 6.2.1 ja 6.2.2.

7 Hautausavustuksen pääoma-arvokertoimet

Hautausavustus on korvaus, joka maksetaan omaisille, mikäli vakuutettu menehtyy vakuutuksen ollessa voimassa.

Kun x on henkilön ikä ja w on määräaikaisen vakuutuksen päättymisikä, niin hautausavustuksen pääoma-arvokerroin määritellään

$$\bar{A}^{K}_{x:w} = \int_x^w e^{-\int_x^t \mu_s \,\mathrm{d}s} \mu_t e^{-\int_x^t \delta \,\mathrm{d}s} \,\mathrm{d}t = \frac{1}{D_x} \int_x^w D_t \mu_t \,\mathrm{d}t. \tag{7.1}$$

Tekijä $e^{-\int_x^t \mu_s \,\mathrm{d}s} \mu_t \,\mathrm{d}t$ kuvaa todennäköisyyttä, että edunjättäjä kuolee iässä t. Jälkimmäisellä eksponenttifunktiolla diskontataan iässä t suoritettava hautausavustus laskentahetkeen.

Hautausavustuksen pääoma-arvokerroin voidaan esittää myös muodossa

$$\bar{A}^{K}_{x:w} = \frac{\overline{M}_x - \overline{M}_w}{D_x}. \tag{7.2}$$

Jos sopimus hautausavustuksesta on elinikäinen, niin hautausavustuksen pääoma-arvokerroin lasketaan kaavalla

$$\bar{A}^{K}_{x} = \frac{\overline{M}_x}{D_x}. \tag{7.3}$$

Kaavoja (7.2) ja (7.3) käytetään pääoma-arvokertoimien laskemiseen sekä yksiosaisen että kaksiosaisen kuolevuusmallin tapauksessa.

8 Pääoma-arvokertoimien interpolointi

Funktioiden D ja $\bar{N}$ arvot on yleensä laskettu valmiiksi ainoastaan kokonaisille ikävuosille. Näin on tehty esimerkiksi työeläkejärjestelmässä. Kun henkilön ikä x tai eläkeikä w ei ole kokonaisluku, funktioiden tarvittavat arvot saadaan valmiiksi lasketuista luvuista lineaarisesti interpoloimalla. Yleisperiaate on, että kukin interpoloitavan lausekkeen eri komponenteista koostuva looginen kokonaisuus interpoloidaan kokonaisuutena (Eläkevakuutuksen laskuperusteisiin liittyvä laskentatekniikka).

Seuraavissa kaavoissa merkinnällä $\lfloor x \rfloor$ tarkoitetaan suurinta kokonaislukua, joka on pienempi tai yhtä suuri kuin x eli iän x kokonaislukuosaa. Henkilön täysiä vuosia ylittävää ikää merkitään symbolilla p eli $p = x - \lfloor x \rfloor$.

8.1 Pääoma-arvokertoimien interpolointi

8.1.1 Vanhuuseläkkeet

8.1.1.1 Funktio $\frac{\bar{N}_w}{D_x}$

(8.1) $$\frac{\bar{N}_w}{D_x} = \Big((1-p_w) \cdot \bar{N}_{\lfloor w \rfloor} + p_w \cdot \bar{N}_{\lfloor w \rfloor + 1} \Big) \Big((1-p_x) \cdot \frac{1}{D_{\lfloor x \rfloor}} + p_x \cdot \frac{1}{D_{\lfloor x \rfloor} + 1} \Big),$$

missä $p_x = x - \lfloor x \rfloor$ ja $p_w = w - \lfloor w \rfloor$.

8.1.1.2 Funktio a_x

Kaavan (8.1) perusteella funktio a_x interpoloidaan seuraavasti:

(8.2) $$\bar{a}_x = (1-p) \cdot \bar{a}_{\lfloor x \rfloor} + p \cdot \bar{a}_{\lfloor x \rfloor + 1}.$$

8.1.2 Työkyvyttömyyseläkkeet

Interpolointikaavoja ei tarvita työkyvyttömyyseläkkeiden pääoma-arvokertoimien laskennassa, koska niiden tarkat arvot voidaan helposti laskea sijoittamalla ikä x ja eläkeikä w suoraan pääoma-arvokertoimien kaavoihin. Kaavat toimivat myös silloin, kun eläkeikä w ei ole kokonaisluku.

8.1.3 Perhe-eläkkeet

Perhe-eläkkeiden pääoma-arvokertoimet interpoloidaan vastaavalla tavalla kuin vanhuuseläkkeiden pääoma-arvokertoimet. Poikkeuksena ovat alkaneiden lapseneläkkeiden pääoma-arvokertoimet $\bar{A}_{x:w}^{PA_{lapsi}}$, jotka voidaan helposti laskea suoraan kohdassa 6.2.2 esitettyjen kaavojen avulla.

Mikäli perhe-eläkkeiden pääoma-arvokertoimien kaavoissa esiintyvän aviopuolison ikää kuvaavan funktion $y_x(J)$ arvo ei ole kokonaisluku, niin $\bar{a}_{y_x(J)}$ voidaan interpoloida. Interpolointi suoritetaan lineaarisesti siten, että

$$\bar{a}_{y_x(J)} = \left(1 - p_{y_x(J)}\right) \cdot \bar{a}_{\lfloor y_x(J) \rfloor} + p_{y_x(J)} \cdot \bar{a}_{\lfloor y_x(J) \rfloor + 1}, \tag{8.3}$$

missä $p_{y_x(J)} = y_x(J) - \lfloor y_x(J) \rfloor$ ja merkinnällä $\lfloor y_x(J) \rfloor$ tarkoitetaan iän $y_x(J)$ kokonaislukuosaa.

8.1.4 Hautausavustus

Hautausavustusten pääoma-arvokertoimet interpoloidaan vastaavalla tavalla kuin vanhuuseläkkeiden pääoma-arvokertoimet.

8.2 Rahastoidun vanhuuseläkkeen muunto

Lakisääteiset työeläkkeet rahastoidaan sovitun laskennallisen eläkeiän w mukaan. Eläkkeen alkaessa muussa iässä eläkkeen määrä muunnetaan siten, että vakuutuksen pääoma-arvo säilyy. Tällöin rahastoidun vanhuuseläkkeen muunto saadaan yhtälöstä

$$\frac{\bar{N}_w}{D_z} E^R(w) = \frac{\bar{N}_z}{D_z} E^R(z), \tag{8.4}$$

missä $E^R(w)$ on laskennallista eläkeikää w vastaava rahastoitu eläke ennen muuntoa ja $E^R(z)$ on eläkeikää z vastaavaksi muunnettu rahastoitu eläke.

Seuraavissa kaavoissa yksinkertaisuuden vuoksi oletetaan, että laskennallinen eläkeikä w on kokonaisluku.

Tämän luvun alussa mainitun interpoloinnin yleisperiaatteen mukaan olisi interpolointia sovellettava yhtälössä (8.4) erikseen kokonaisuuksiin $\frac{\bar{N}_w}{D_z}$ ja $\frac{\bar{N}_z}{D_z}$. Tällöin kaavan (8.1) perusteella saadaan

$$E^R(z) = \frac{(1-p_z)\cdot \bar{N}_w D_{\lfloor z \rfloor +1} + p_z \cdot \bar{N}_w D_{\lfloor z \rfloor}}{(1-p_z)\cdot \bar{N}_{\lfloor z \rfloor} D_{\lfloor z \rfloor +1} + p_z \cdot \bar{N}_{\lfloor z \rfloor +1} D_{\lfloor z \rfloor}} E^R(w), \tag{8.5}$$

missä $p_z = z - \lfloor z \rfloor$.

Työeläkejärjestelmässä on sovittu käytettävän yksinkertaisempaa tapaa, joka lähtee siitä, että interpolointia ennen funktiot D_z voidaan kaavassa (8.4) supistaa pois seuraavasti (Eläketurvakeskus 1995):

$$E^R(z) = \frac{\bar{N}_w}{\bar{N}_z} E^R(w). \tag{8.6}$$

Tällöin interpoloitava kokonaisuus on kaavan (8.6) osa $\frac{\bar{N}_w}{\bar{N}_z}$ ja rahastoitu vanhuuseläke muunnetaan kaavalla (Eläketurvakeskus 2002)

$$E^R(z) = \left((1-p_z)\cdot \frac{\bar{N}_w}{\bar{N}_{\lfloor z \rfloor}} + p_z \cdot \frac{\bar{N}_w}{\bar{N}_{\lfloor z \rfloor +1}} \right) E^R(w). \tag{8.7}$$

Kaavassa (8.7) pääoma-arvon säilyvyys ei täysin toteudu. Kyseistä interpolointitapaa käytetään yksityisten alojen työeläkevakuutuksissa, esimerkiksi työeläkejärjestelmän yhteisessä ansaintajärjestelmässä vanhuuseläkevastuiden laskennassa.

Ennen vuotta 2010 oli erilaisia käytäntöjä siinä, käsitelläänkö kaavassa (8.6) funktioiden N suhdetta vai kutakin funktiota N yhtenä kokonaisuutena. Interpolointitavan (8.7) rinnalla käytettiin muun muassa menetelmää, jossa N_z interpoloidaan ensin erikseen ja vasta tämän jälkeen lasketaan funktioiden N_w ja N_z suhde. Tällöin rahastoitu eläke muunnettiin kaavalla

$$E^R(z) = \frac{\bar{N}_w}{\left((1-p_z)\cdot \bar{N}_{\lfloor z \rfloor} + p_z \cdot \bar{N}_{\lfloor z \rfloor +1} \right)} E^R(w). \tag{8.8}$$

9 Ikäsiirtojen käytöstä diskonttaus- ja kommutaatiofunktioissa

Diskonttaus- ja kommutaatiofunktioissa esiintyvän kuolevuuden μ_x yhtenä parametrina on ikäsiirto b_2. Otetaan seuraavaksi ikäsiirto näkyviin kohdan 3 merkintöihin merkitsemällä

$$\begin{aligned}
&D(x,b_2) := D_x \\
&\overline{N}(x,b_2) := \overline{N}_x \\
&\bar{a}(x,b_2) := \bar{a}_x \\
&\overline{M}(x,b_2) := \overline{M}_x.
\end{aligned}$$

Voidaan osoittaa, että

$$D(x,b_2) = \frac{D(x+b_2,0)}{D(b_2,0)} \tag{9.1}$$

$$\overline{N}(x,b_2) = \frac{\overline{N}(x+b_2,0)}{D(b_2,0)} \tag{9.2}$$

$$\bar{a}(x,b_2) = \bar{a}(x+b_2,0) \tag{9.3}$$

$$\overline{M}(x,b_2) = \frac{\overline{M}(x+b_2,0)}{D(b_2,0)}. \tag{9.4}$$

Kaavat pätevät sekä yksiosaisen että kaksiosaisen kuolevuusmallin tapauksessa.

Diskonttaus- ja kommutaatiofunktioiden arvot taulukoidaan yleensä etukäteen. Pääoma-arvokertoimia laskettaessa funktiot D, $\overline{N}$ ja $\overline{M}$ esiintyvät aina osamäärissä, jolloin edellä esiintyvä termi $D(b_2,0)$ supistuu osamäärien yhteydessä pois. Tällöin yllä olevan mukaan riittää, että taulukointi tehdään ikäsiirrolla $b_2 = 0$. Tämän jälkeen taulukoita luetaan ikäsiirrolla korjatun iän $x+b_2$ mukaan ja saatuja arvoja käytetään sellaisinaan pääoma-arvokertoimiin. Menettelyn avulla vältytään moninkertaiselta taulukoinnilta, jossa yhtä ikää kohden taulukoitaisiin useita eri ikäsiirtoja vastaavat arvot esimerkiksi henkilön sukupuolesta ja syntymävuodesta riippuen.

Ikäsiirtojen käytöstä esitetään laskentaesimerkki kohdassa 10.

10 Esimerkit

Tähän lukuun on koottu laskuesimerkkejä pääoma-arvokertoimien käyttämisestä. Suurin osa esimerkeistä liittyy eläkevastuun laskentaan. Vastuulla arvioidaan niitä kustannuksia, joita luvatut etuudet tulevat vakuutuksen tarjoajalle aiheuttamaan. Termillä vakuutusmaksuvastuu tarkoitetaan vastaisiin eläkkeisiin liittyvää vastuuta ja termillä korvausvastuu alkaneisiin eläkkeisiin liittyvää vastuuta. Eläkkeiden kertasuorituksista ei esitetä esimerkkejä, mutta ne voidaan laskea kuten alkaneiden eläkkeiden vastuut. Luvun loppuun on kerätty muutamia muita pääoma-arvoihin liittyviä tilanteita.

Esimerkeissä vastuut lasketaan vuoden lopun tasolle ja henkilöiden syntymäpäivien oletetaan olevan keskellä vuotta, jos ei muuta sanota. Tällöin henkilön ikään lisätään puoli vuotta ja pääoma-arvokertoimet interpoloidaan lineaarisesti. Tämä esimerkkien tekniikka on ollut käytössä työeläkejärjestelmässä 1960-luvulta lähtien. Tekniikka on mahdollistanut suurien tietomäärien tehokkaan laskennan. Työkyvyttömyyseläkkeiden kohdalla numeerista integrointia ei tarvita, joten esimerkit lasketaan pääoma-arvokertoimien tarkoilla arvoilla ilman taulukoitujen arvojen interpolointia.

Esimerkeissä käytetään työntekijän eläkelain mukaisessa eläkevakuutuksessa sovellettavia pääoma-arvokertoimia, vaikka kaikki esimerkkien tilanteet eivät tulekaan sovellettaviksi työntekijän eläkelain mukaisissa vakuutuksissa. Käytetyt pääoma-arvokertoimet löytyvät liitteestä D ja niihin liittyvät yleisvakiot ja erikoisvakiot liitteestä A. Tarvittaessa esimerkkien pääoma-arvokertoimet interpoloidaan kohdan 8 mukaisesti. Diskonttaus- ja kommutaatiofunktioiden osalta esimerkkeissä käytetään kohdan 9 mukaisia merkintöjä ikään ja ikäsiirtoon liittyvien parametrien esittämisessä.

10.1 Ikäsiirtojen käyttö

Selvitetään vastaisen elinikäisen vanhuuseläkkeen pääoma-arvokerroin $\bar{A}^V_{x:w}$, kun

- laskentahetki on 31.12.2018
- kerroin lasketaan miehelle
- miehen ikä laskentahetkellä $x = 45$ vuotta
- eläkeikä $w = 65$ vuotta
- käytettävä korkokanta $i = 3,00$ %.

Vastaisen vanhuuseläkkeen pääoma-arvokerroin on $\frac{\bar{N}_w}{D_x}$, koska $x < w$.

Henkilö on syntynyt vuonna 1973. Ensin syntymävuoden perusteella haetaan liitteen A.2 erikoisvakioista henkilön kohdalla sovellettava ikäsiirto $b_2 = -3$. Tämän jälkeen pääoma-arvokerroin $\bar{A}^V_{45:65}$ voidaan laskea kohdassa 9 esitettyjen kaavojen perusteella seuraavasti:

$$\bar{A}^V_{45:65} = \frac{\bar{N}_{65}}{D_{45}} = \frac{\bar{N}(65,-3)}{D(45,-3)} = \frac{\frac{\bar{N}(65+(-3),0)}{D(-3,0)}}{\frac{D(45+(-3),0)}{D(-3,0)}} = \frac{\bar{N}(62,0)}{D(42,0)}.$$

Laskennassa tarvittavien funktioiden D ja $\bar{N}$ arvot on laskettu valmiiksi ikäsiirrolla $b_2 = 0$ liitteen D.1 miesten diskonttaus- ja kommutaatiofunktioiden taulukoihin. Taulukoista saadaan

$$\bar{N}(62,0) = 2,3839652$$
$$D(42,0) = 0,28464787.$$

Tällöin

$$\bar{A}^V_{45:65} = \frac{2,3839652}{0,28464787} \approx 8,37514.$$

10.2 Vanhuuseläkevastuun laskeminen

10.2.1 Vastaiset vanhuuseläkkeet

10.2.1.1 Vastainen elinikäinen vanhuuseläke

Lasketaan vastaisen elinikäisen vanhuuseläkkeen vakuutusmaksuvastuu 45-vuotiaalle miehelle, kun

- vastuunlaskentahetki on 31.12.2018
- vastuunlaskentahetkellä henkilön ikä $x = 45,5$ vuotta
- eläkeikä $w = 65$ vuotta
- käytettävä korkokanta $i = 3,00$ %
- luvattu vanhuuseläke on 12 000 euroa vuodessa.

Vastaisen vanhuuseläkkeen pääoma-arvokerroin on $\frac{\bar{N}_w}{D_x}$, koska $x < w$.

Henkilö on syntynyt vuonna 1973, joten ikäsiirto $b_2 = -3$. Kun ikäsiirto huomioidaan, saadaan liitteen D.1 miesten pääoma-arvokerrointaulukosta, että

$$\begin{aligned}
\bar{N}(62,0) &= 2,3839652 \\
D(42,0) &= 0,28464787 \\
D(43,0) &= 0,27596543.
\end{aligned}$$

Tällöin vakuutusmaksuvastuu on

$$\begin{aligned}
\bar{A}^V_{45+\frac{1}{2}:65} \cdot 12\,000\,€ &= 0,5 \cdot \left(\frac{\bar{N}(65,-3)}{D(45,-3)} + \frac{\bar{N}(65,-3)}{D(46,-3)} \right) \cdot 12\,000\,€ \\
&= 0,5 \cdot \left(\frac{\bar{N}(62,0)}{D(42,0)} + \frac{\bar{N}(62,0)}{D(43,0)} \right) \cdot 12\,000\,€ \\
&\approx 8,50689 \cdot 12\,000\,€ \\
&\approx 102\,083\,€.
\end{aligned}$$

10.2.1.2 Vastainen määräaikainen vanhuuseläke

Lasketaan vastaisen määräaikaisen vanhuuseläkkeen vakuutusmaksuvastuu 52-vuotiaalle miehelle, kun

- vastuunlaskentahetki on 31.12.2018
- vastuunlaskentahetkellä henkilön ikä $x = 52,5$ vuotta
- määräaikaisen eläkkeen alkamisikä $w_1 = 60$ vuotta
- määräaikaisen eläkkeen päättymisikä $w_2 = 65$ vuotta
- käytettävä korkokanta $i = 3,00$ %
- luvattu määräaikainen vanhuuseläke on 12 000 euroa vuodessa.

Henkilö on syntynyt vuonna 1966, joten ikäsiirto $b_2 = -2$. Vastaisen määräaikaisen vanhuuseläkkeen pääoma-arvokerroin on $\frac{\bar{N}_{w_1}}{D_x} - \frac{\bar{N}_{w_2}}{D_x}$, koska $x < w_1$. Kun ikäsiirto huomioidaan, saadaan liitteen D.1 miesten pääoma-arvokerrointaulukosta, että

$$
\begin{aligned}
\bar{N}(58,0) &= 3,0142744 \\
\bar{N}(63,0) &= 2,2403614 \\
D(50,0) &= 0,22119043 \\
D(51,0) &= 0,21413286.
\end{aligned}
$$

Tällöin vakuutusmaksuvastuu on

$$
\begin{aligned}
&\bar{A}^{V}_{52+\frac{1}{2}:[60,65]} \cdot 12\,000\text{ €} \\
&= 0,5 \cdot \left(\left(\frac{\bar{N}(60,-2)}{D(52,-2)} + \frac{\bar{N}(60,-2)}{D(53,-2)} \right) - \left(\frac{\bar{N}(65,-2)}{D(52,-2)} + \frac{\bar{N}(65,-2)}{D(53,-2)} \right) \right) \cdot 12\,000\text{ €} \\
&= 0,5 \cdot \left(\left(\frac{\bar{N}(58,0)}{D(50,0)} + \frac{\bar{N}(58,0)}{D(51,0)} \right) - \left(\frac{\bar{N}(63,0)}{D(50,0)} + \frac{\bar{N}(63,0)}{D(51,0)} \right) \right) \cdot 12\,000\text{ €} \\
&\approx 3,55651 \cdot 12\,000\text{ €} \\
&\approx 42\,678\text{ €}.
\end{aligned}
$$

10.2.2 Alkaneet vanhuuseläkkeet

10.2.2.1 Alkanut elinikäinen vanhuuseläke

Lasketaan alkaneen elinikäisen vanhuuseläkkeen korvausvastuu 70-vuotiaalle naiselle, kun

- vastuunlaskentahetki on 31.12.2018
- vastuunlaskentahetkellä henkilön ikä $x = 70,5$ vuotta
- käytettävä korkokanta $i = 3,00$ %
- maksettu vanhuuseläke on 12 000 euroa vuodessa.

Henkilö on syntynyt vuonna 1948, joten ikäsiirto $b_2 = 2$. Kun ikäsiirto huomioidaan, saadaan liitteen D.1 naisten pääoma-arvokerrointaulukosta, että

$$
\begin{aligned}
\bar{a}(72,0) &= 14,25114 \\
\bar{a}(73,0) &= 13,78358.
\end{aligned}
$$

Tällöin korvausvastuu on

$$
\begin{aligned}
\bar{A}^{VA}_{70+\frac{1}{2}} \cdot 12\,000\text{ €} &= 0,5 \cdot \Big(\bar{a}(70,2) + \bar{a}(71,2)\Big) \cdot 12\,000\text{ €} \\
&= 0,5 \cdot \Big(\bar{a}(72,0) + \bar{a}(73,0)\Big) \cdot 12\,000\text{ €} \\
&\approx 14,01736 \cdot 12\,000\text{ €} \\
&\approx 168\,208\text{ €}.
\end{aligned}
$$

10.2.2.2 Alkanut määräaikainen vanhuuseläke

Lasketaan alkaneen määräaikaisen vanhuuseläkkeen korvausvastuu 63-vuotiaalle naiselle, kun

- vastuunlaskentahetki on 31.12.2018
- vastuunlaskentahetkellä henkilön ikä $x = 63,5$ vuotta
- määräaikaisen eläkkeen päättymisikä $w = 65$ vuotta
- käytettävä korkokanta $i = 3,00$ %
- maksettu määräaikainen vanhuuseläke on 12 000 euroa vuodessa.

Henkilö on syntynyt vuonna 1955, joten ikäsiirto $b_2 = 0$. Kun ikäsiirto huomioidaan, saadaan liitteen D.1 naisten pääoma-arvokerrointaulukosta, että

$$\begin{aligned}
\bar{a}(63,0) &= 18{,}02086\\
\bar{a}(64,0) &= 17{,}63121\\
\overline{N}(65,0) &= 2{,}3759607\\
D(63,0) &= 0{,}14768584\\
D(64,0) &= 0{,}14271479.
\end{aligned}$$

Tällöin korvausvastuu on

$$\begin{aligned}
&\bar{A}^{VA}_{63+\frac{1}{2}:65} \cdot 12\,000\text{ €}\\
&= 0{,}5 \cdot \left((\bar{a}(63,0) + \bar{a}(64,0)) - \left(\frac{\overline{N}(65,0)}{D(63,0)} + \frac{\overline{N}(65,0)}{D(64,0)} \right) \right) \cdot 12\,000\text{ €}\\
&\approx 1{,}45791 \cdot 12\,000\text{ €}\\
&\approx 17\,495\text{ €}.
\end{aligned}$$

10.3 Työkyvyttömyyseläkevastuun laskeminen

10.3.1 Vastainen työkyvyttömyyseläke

Lasketaan vastaisen työkyvyttömyyseläkkeen vakuutusmaksuvastuu 58-vuotiaalle henkilölle, kun

- vastuunlaskentahetki on 31.12.2018
- vastuunlaskentahetkellä henkilön ikä $x = 58{,}5$ vuotta
- vanhuuseläkeikä $w = 64$ vuotta ja 6 kuukautta
- käytettävä korkokanta $i = 3{,}00$ %
- luvattu työkyvyttömyyseläke tarpeen vaatiessa on 12 000 euroa vuodessa.

Oletetaan, että työkyvyttömyyden alkaessa sairauspäivärahalla ollaan keskimäärin yhdeksän kuukautta eli $\psi = 9/12$. Pääoma-arvokerroin ${}_{(\psi)}\bar{A}^{I}_{x:w}$ voidaan laskea tekemällä sopivat sijoitukset suoraan pääoma-arvokertoimen kaavaan (5.2). Tällöin vakuutusmaksuvastuu on

$$
\begin{aligned}
&{}_{(9/12)}\bar{A}^{I}_{58+\frac{1}{2}:64\frac{6}{12}} \cdot 12\,000\text{ €}\\
&= \Bigg(\sum_{j=0}^{2} b_{3+j} D_j(58+\frac{1}{2})\\
&\quad \cdot \Big(C_j(64\frac{6}{12}-(58+\frac{1}{2}))\Big[B_j(\frac{9}{12})-B_j(64\frac{6}{12}-(58+\frac{1}{2}))\Big]\\
&\qquad -\frac{1}{c_j}\Big[E_j(\frac{9}{12})-E_j(64\frac{6}{12}-(58+\frac{1}{2}))\Big]\Big)\Bigg)\cdot 12\,000\text{ €}\\
&\approx 0,62813\cdot 12\,000\text{ €}\\
&\approx 7\,538\text{ €}.
\end{aligned}
$$

10.3.2 Alkanut työkyvyttömyyseläke

Lasketaan alkaneen työkyvyttömyyseläkkeen korvausvastuu henkilölle, joka on syntynyt 10.5.1958, kun

- vastuunlaskentahetki on 31.12.2018
- työkyvyttömyyseläke on myönnetty 1.2.2017 alkaen
- vastuunlaskentahetkellä henkilön ikä $x = 60$ vuotta ja 7 kuukautta
- työkyvyttömyyseläkkeen alkamishetkellä henkilön ikä $v = 58$ vuotta ja 8 kuukautta täysien kuukausien tarkkuudella
- vanhuuseläkeikä $w = 64$ vuotta
- käytettävä korkokanta $i = 3,00\,\%$
- työkyvyttömyyseläkkeen määrä on 12 000 euroa vuodessa.

Vastuunlaskentahetkellä henkilö on ollut työkyvyttömänä 1 vuoden ja 11 kuukautta. Pääoma-arvokerroin $\bar{A}^{IA}_{(v)+(x-v):w}$ voidaan laskea tekemällä sopivat sijoitukset suoraan pääoma-arvokertoimen kaavaan (5.4). Tällöin korvausvastuu on

$$
\begin{aligned}
&\bar{A}^{IA}_{(58\frac{8}{12})+(60\frac{7}{12}-58\frac{8}{12}):64}\cdot 12\,000\text{ €}\\
&= \frac{\sum_{j=0}^{2} b_{3+j} A_j(58\frac{8}{12})\left[E_j(60\frac{7}{12})-E_j(64)\right]}{\sum_{j=0}^{2} b_{3+j} d_j A_j(58\frac{8}{12}) E_j(60\frac{7}{12})}\cdot 12\,000\text{ €}\\
&\approx 3,10818\cdot 12\,000\text{ €}\\
&\approx 37\,298\text{ €}.
\end{aligned}
$$

10.4 Perhe-eläkevastuun laskeminen

Perhe-eläkkeiden pääoma-arvoja laskettaessa esimerkeissä on käytetty työntekijän eläkelain mukaisen eläkevakuutuksen mukaisia ikäsiirtoja. Vastaisia perhe-eläkkeitä koskevissa esimerkeissä ikäsiirrot on huomioitu valmiiksi perhe-eläkkeiden pääoma-arvokerrointaulukoissa, jotka on esitetty liitteessä D.

10.4.1 Vastaiset perhe-eläkkeet

10.4.1.1 Vastainen leskeneläke

Lasketaan vastaisen leskeneläkkeen vakuutusmaksuvastuu, kun

- vastuunlaskentahetki on 31.12.2018
- edunjättäjä on mies
- vastuunlaskentahetkellä edunjättäjän ikä $x = 50,5$ vuotta
- käytettävä korkokanta $i = 3,00$ %
- luvattu leskeneläke on 6 000 euroa vuodessa.

Käytetään funktiota $F(t) = n_t(M)\bar{a}_{y_t(M)+b_2}$, missä $t \geq x$ on edunjättäjän ikä kuolinhetkellä. Edunjättäjä on syntynyt vuonna 1968, joten hänen ikäsiirtonsa $b_2 = -2$. Edunsaajan laskennallinen ikä vastuunlaskentahetkellä on $y_{50,5}(M) \approx 48,2$ vuotta. Edunsaajan laskennallista ikää vastaava syntymävuosi on 1970, joten hänen ikäsiirtonsa $b_2 = -3$. Koska ikäsiirrot on jo huomioitu liitteen D.3 perhe-eläkkeiden pääoma-arvokerrointaulukoissa, saadaan miespuolisen edunjättäjän taulukosta suoraan, että

$$\bar{A}_{50}^{P_{leski}} = 2,72131$$
$$\bar{A}_{51}^{P_{leski}} = 2,76698.$$

Tällöin vakuutusmaksuvastuu on

$$\begin{aligned}\bar{A}_{50+\frac{1}{2}}^{P_{leski}} \cdot 6\,000\text{ €} &= 0,5 \cdot \left(\bar{A}_{50}^{P_{leski}} + \bar{A}_{51}^{P_{leski}}\right) \cdot 6\,000\text{ €} \\ &\approx 2,74415 \cdot 6\,000\text{ €} \\ &\approx 16\,465\text{ €}.\end{aligned}$$

10.4.1.2 Vastainen lapseneläke

Lasketaan vastaisen lapseneläkkeen vakuutusmaksuvastuu, kun

- vastuunlaskentahetki on 31.12.2018
- edunjättäjä on nainen
- vastuunlaskentahetkellä edunjättäjän ikä $x = 36,5$ vuotta
- lapseneläkkeen pääteikä $w = 18$ vuotta
- käytettävä korkokanta $i = 3,00$ %
- luvattu lapseneläke on 4 000 euroa vuodessa.

Käytetään funktiota $F(t) = \bar{Z}_t(w,N)$, missä $t \geq x$ on edunjättäjän ikä kuolinhetkellä. Edunjättäjän syntymävuosi on 1982, joten tällöin hänen ikäsiirtonsa $b_2 = -5$. Koska ikäsiirrot on jo huomioitu liitteen D.3 perhe-eläkkeiden pääoma-arvokerrointaulukoissa, saadaan naispuolisen edunjättäjän taulukosta suoraan, että

$$\bar{A}^{P_{lapsi}}_{36:18} = 0,01890$$
$$\bar{A}^{P_{lapsi}}_{37:18} = 0,01784.$$

Tällöin vakuutusmaksuvastuu on

$$\begin{aligned}\bar{A}^{P_{lapsi}}_{36+\frac{1}{2}:18} \cdot 4\,000 \text{ €} &= 0,5 \cdot \left(\bar{A}^{P_{lapsi}}_{36:18} + \bar{A}^{P_{lapsi}}_{37:18}\right) \text{ €} \\ &\approx 0,01837 \cdot 4\,000 \text{ €} \\ &\approx 73 \text{ €}.\end{aligned}$$

10.4.1.3 Vastainen perhe-eläke

Lasketaan vastaisen perhe-eläkkeen vakuutusmaksuvastuu, kun

- vastuunlaskentahetki on 31.12.2018
- edunjättäjä on mies
- vastuunlaskentahetkellä edunjättäjän ikä $x = 50,5$ vuotta
- edunsaajia ovat leski ja lapset
- lapseneläkkeen pääteikä $w = 18$ vuotta
- käytettävä korkokanta $i = 3,00$ %
- parametri $f = 0,99$
- luvattu perhe-eläke on 6 000 euroa vuodessa.

Edunjättäjä on syntynyt vuonna 1968, joten hänen ikäsiirtonsa $b_2 = -2$. Lesken laskennallinen ikä vastuunlaskentahetkellä on $y_{50,5}(M) \approx 48,2$ vuotta. Lesken laskennallista ikää vastaava syntymävuosi on 1970, joten hänen ikäsiirtonsa $b_2 = -3$. Koska ikäsiirrot on jo huomioitu liitteen D.3 perhe-eläkkeiden pääoma-arvokerrointaulukoissa, saadaan miespuolisen edunjättäjän taulukosta suoraan, että

$$
\begin{aligned}
{}_{(0,99)}\bar{A}^{P_1}_{50:18} &= 2,71524 \\
{}_{(0,99)}\bar{A}^{P_1}_{51:18} &= 2,75803.
\end{aligned}
$$

Tällöin vakuutusmaksuvastuu on

$$
\begin{aligned}
{}_{(0,99)}\bar{A}^{P_1}_{50+\frac{1}{2}:18} \cdot 6\,000\,€ &= 0,5 \cdot \left({}_{(0,99)}\bar{A}^{P_1}_{50:18} + {}_{(0,99)}\bar{A}^{P_1}_{51:18} \right) \cdot 6\,000\,€ \\
&\approx 2,73664 \cdot 6\,000\,€ \\
&\approx 16\,420\,€.
\end{aligned}
$$

10.4.2 Alkaneet perhe-eläkkeet

10.4.2.1 Alkanut leskeneläke

Lasketaan alkaneen leskeneläkkeen korvausvastuu, kun

- vastuunlaskentahetki on 31.12.2018
- edunsaaja on mies
- vastuunlaskentahetkellä edunsaajan ikä $x = 47,5$ vuotta
- käytettävä korkokanta $i = 3,00\,\%$
- maksettu leskeneläke on 6 000 euroa vuodessa.

Edunsaaja on syntynyt vuonna 1971, joten ikäsiirto $b_2 = -3$. Kun ikäsiirto huomioidaan, saadaan liitteen D.1 miesten pääoma-arvokerrointaulukosta, että

$$
\begin{aligned}
\bar{a}(44,0) &= 22,54718 \\
\bar{a}(45,0) &= 22,24711.
\end{aligned}
$$

Tällöin korvausvastuu on

$$
\begin{aligned}
\bar{A}^{PA_{leski}}_{47+\frac{1}{2}} \cdot 6\,000\,€ &= 0,5 \cdot \Big(\bar{a}(47,-3) + \bar{a}(48,-3)\Big) \cdot 6\,000\,€ \\
&= 0,5 \cdot \Big(\bar{a}(44,0) + \bar{a}(45,0)\Big) \cdot 6\,000\,€ \\
&\approx 22,39715 \cdot 6\,000\,€ \\
&\approx 134\,383\,€.
\end{aligned}
$$

10.4.2.2 Alkanut lapseneläke

Lasketaan alkaneen lapseneläkkeen korvausvastuu, kun

- vastuunlaskentahetki on 31.12.2018
- vastuunlaskentahetkellä edunsaajana olevan lapsen ikä $x = 15,5$ vuotta
- lapseneläkkeen pääteikä $w = 18$ vuotta
- käytettävä korkokanta $i = 3,00$ %
- maksettu lapseneläke on 4 000 euroa vuodessa.

Tällöin korvausvastuu on

$$
\begin{aligned}
\bar{A}^{PA_{lapsi}}_{15+\frac{1}{2}:18} \cdot 4\,000\,€ &= \frac{1 - e^{-(\ln 1{,}03)(18-(15+\frac{1}{2}))}}{\ln 1,03} \cdot 4\,000\,€ \\
&\approx 2,40986 \cdot 4\,000\,€ \\
&\approx 9\,639\,€.
\end{aligned}
$$

10.4.2.3 Alkanut perhe-eläke

Lasketaan alkaneen perhe-eläkkeen korvausvastuu, kun

- vastuunlaskentahetki on 31.12.2018
- edunsaajina ovat nainen ja lapsi
- vastuunlaskentahetkellä naisen ikä $x = 49,5$ vuotta
- vastuunlaskentahetkellä lapsen ikä $x_1 = 16,5$ vuotta
- lapseneläkkeen pääteikä $w = 18$ vuotta
- käytettävä korkokanta $i = 3,00$ %
- edunjättäjän ansaittu eläke on 12 000 euroa vuodessa.

Vastuunlaskennassa perhe-eläkkeen perusteena E^P on koko edunjättäjän ansaittu eläke. Työntekijän eläkelain 85 § ja 86 §:n mukaan lesken osuus perhe-eläkkeen perusteesta $C_0 = \frac{6}{12}$ ja lapseneläkkeen osuus $C_1 = \frac{4}{12}$.

Leski on syntynyt vuonna 1969, joten ikäsiirto $b_2 = -2$. Kun ikäsiirto huomioidaan, saadaan liitteen D.1 naisten pääoma-arvokerrointaulukosta, että

$$\begin{aligned}\bar{a}(47,0) &= 23{,}38780\\ \bar{a}(48,0) &= 23{,}10135.\end{aligned}$$

Tällöin korvausvastuu on

$$\begin{aligned}&\left(C_0 \cdot \bar{A}^{PA_{leski}}_{49+\frac{1}{2}} + C_1 \cdot \bar{A}^{PA_{lapsi}}_{16+\frac{1}{2}:18}\right) \cdot 12\,000\,€\\ &= \Bigg(\frac{6}{12} \cdot 0{,}5 \cdot (\bar{a}(49,\,-2) + \bar{a}(50,\,-2))\\ &\qquad + \frac{4}{12} \cdot \frac{1 - e^{-(\ln 1{,}03)(18-(16+\frac{1}{2}))}}{\ln 1{,}03}\Bigg) \cdot 12\,000\,€\\ &= \Bigg(\frac{6}{12} \cdot 0{,}5 \cdot (\bar{a}(47,0) + \bar{a}(48,0))\\ &\qquad + \frac{4}{12} \cdot \frac{1 - e^{-(\ln 1{,}03)(18-(16+\frac{1}{2}))}}{\ln 1{,}03}\Bigg) \cdot 12\,000\,€\\ &\approx 12{,}11137 \cdot 12\,000\,€\\ &\approx 145\,336\,€.\end{aligned}$$

10.5 Hautausavustusvastuun laskeminen

Lasketaan elinikäisen hautausavustuksen vakuutusmaksuvastuu, kun

- vastuunlaskentahetki on 31.12.2018
- edunjättäjä on mies ja vastuunlaskentahetkellä hänen ikänsä $x = 63,5$ vuotta
- käytettävä korkokanta $i = 3,00$ %
- hautausavustuksen määrä on 2 500 euroa.

Henkilö on syntynyt vuonna 1955, joten ikäsiirto $b_2 = 0$. Kun ikäsiirto huomioidaan, saadaan liitteen D.1 miesten pääoma-arvokerrointaulukosta, että

$$\begin{aligned}
\overline{M}(63,0) &= 0,074675296 \\
\overline{M}(64,0) &= 0,073430442 \\
D(63,0) &= 0,14089770 \\
D(64,0) &= 0,13556709.
\end{aligned}$$

Tällöin vakuutusmaksuvastuu on

$$\begin{aligned}
\bar{A}^{K}_{63+\frac{1}{2}} \cdot 2\,500\text{ €} &= 0,5 \cdot \left(\frac{\overline{M}(63,0)}{D(63,0)} + \frac{\overline{M}(64,0)}{D(64,0)} \right) \cdot 2\,500\text{ €} \\
&\approx 0,53583 \cdot 2\,500\text{ €} \\
&\approx 1\,340\text{ €}.
\end{aligned}$$

10.6 Vakuutusmaksun laskeminen

Lasketaan vakuutusmaksu 40-vuotiaalle naiselle, kun korvattavia etuuksia ovat vanhuus- ja työkyvyttömyyseläke ja kun

- vakuutusmaksun laskentahetki on 1.7.2018
- vanhuuseläkeikä $w = 66$ vuotta
- käytettävä korkokanta $i = 3,00$ %
- työkyvyttömyyden alkaessa sairauspäivärahalla ollaan keskimäärin yhdeksän kuukautta eli $\psi = 9/12$
- vuoden aikana karttuva etuus rahastoidaan kokonaan ja se on 600 euroa vuodessa
- mahdollisen työkyvyttömyyseläkkeen alkaessa rahastoidaan tulevan ajan eläkkeenä 10 000 euroa vuositasolla.

Henkilö on syntynyt vuonna 1978, joten ikäsiirto $b_2 = -3$. Karttuvasta määrästä saadaan laskettua niin sanottu vanhuuseläkkeen kertamaksu

$$\begin{aligned}
{}^{k}P^{V}_{2018} &= \bar{A}^{V}_{40:66} \cdot 600\,€ = \frac{\bar{N}(66,-3)}{D(40,-3)} \cdot 600\,€ = \frac{\bar{N}(63,0)}{D(37,0)} \cdot 600\,€ \\
&\approx 7,98396 \cdot 600\,€ \\
&\approx 4\;790\,€
\end{aligned}$$

ja niin sanottu työkyvyttömyyseläkkeen kertamaksu

$$\begin{aligned}
{}^{k}P^{I}_{2018} &= {}_{(9/12)}\bar{A}^{I}_{40:66} \cdot 600\,€ \\
&= \Big(\sum_{j=0}^{2} b_{3+j} D_j(40) \big(C_j(66-40)[B_j(9/12) \\
&\quad - B_j(66-40)] - \frac{1}{c_j}[E_j(9/12) - E_j(66-40)] \big) \Big) \cdot 600\,€ \\
&= 2,16975 \cdot 600\,€ \\
&\approx 1\;302\,€.
\end{aligned}$$

Vuoden aikana mahdollisesti syntyvästä työkyvyttömyydestä voidaan laskea tulevan ajan etuudelle niin sanottua vanhuuseläkkeen riskimaksua työkyvyttömyysintensiteetin avulla kaavan (2.9) mukaisesti seuraavasti:

$$\begin{aligned}
{}^{r}P^{V}_{2018} &= \frac{z(40, \frac{9}{12})}{e^{-a_4 \cdot 40} - \int_{9/12}^{40} z(40,u)\, \mathrm{d}u} \cdot \frac{\bar{N}(66, -3)}{D(40, -3)} \cdot 10\,000\,€ \\
&= \frac{z(40, \frac{9}{12})}{e^{-a_4 \cdot 40} - \int_{9/12}^{40} z(40,u)\, \mathrm{d}u} \cdot \frac{\bar{N}(63, 0)}{D(37, 0)} \cdot 10\,000\,€ \\
&\approx 0{,}0030539416 \cdot 7{,}98396 \cdot 10\,000\,€ \\
&\approx 244\,€
\end{aligned}$$

ja niin sanottua työkyvyttömyyseläkkeen riskimaksua ottamalla ikävälillä (39,5; 40,5) alkavan työkyvyttömyystapauksen osuus pääoma-arvokertoimesta ${}_{(9/12)}\bar{A}^{I}_{40,5:66}$ seuraavasti (ks. Turtiainen ym. 1982 s. 52, TyEL:n mukaiset yleiset laskuperusteet):

$$\begin{aligned}
{}^{r}P^{I}_{2018} &= \left({}_{(9/12)}\bar{A}^{I}_{39,5:66} - e^{-(a_4+\delta)}\,{}_{(9/12)}\bar{A}^{I}_{40,5:66}\right) \cdot 10\,000\,€ \\
&\approx 0{,}04104 \cdot 10\,000\,€ \\
&\approx 410\,€.
\end{aligned}$$

Vuosimaksu saadaan laskemalla yhteen vanhuus- ja työkyvyttömyyseläkkeen kertamaksut ja vanhuus- ja työkyvyttömyyseläkkeen riskimaksut, jolloin vuosimaksu on

$${}^{k}P^{V}_{2018} + {}^{k}P^{I}_{2018} + {}^{r}P^{V}_{2018} + {}^{r}P^{I}_{2018} \approx 6\,746\,€.$$

10.7 Eläkkeen muuntaminen

Eläkkeet rahastoidaan sovitun laskennallisen iän mukaan. Eläkkeen alkaessa muussa iässä voidaan eläkkeen määrää muuntaa siten, että vakuutuksen pääoma-arvo säilyy.

10.7.1 Eläkkeen muuntaminen yleisesti

Lasketaan kertyneen eläkkeen määrä vanhuuseläkkeelle siirtyvälle 63,5-vuotiaalle miehelle, kun vakuutus sisältää turvan vanhuuden ja työkyvyttömyyden varalta ja kun

- laskentahetki on 31.12.2018
- alkuperäinen eläkeikä $w = 65$ vuotta
- käytettävä korkokanta $i = 3,00$ %
- sairauspäivärahoihin liittyvä parametri $\psi = 9/12$
- kertynyt eläke $E(65) = 12\ 000$ euroa.

Eläkkeen pääoma-arvo säilyy eläkettä muunnettaessa, joten

$$\left(\bar{A}^{V}_{63,5:65} + {}_{(9/12)}\bar{A}^{I}_{63,5:65}\right) \cdot E(65) = \left(\bar{A}^{VA}_{63,5} + {}_{(9/12)}\bar{A}^{I}_{63,5:63,5}\right) \cdot E(63,5).$$

Henkilö on syntynyt vuonna 1955, joten työntekijän eläkelain mukainen ikäsiirto $b_2 = 0$. Tällöin

$$\begin{aligned} E(63,5) &= \frac{\bar{A}^{V}_{63,5:65} + {}_{(9/12)}\bar{A}^{I}_{63,5:65}}{\bar{A}^{VA}_{63,5} + 0} \cdot E(65) \\ &= \frac{\left(\frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{N}(65,0)}{D(63,0)} + \frac{1}{2} \cdot \frac{\bar{N}(65,0)}{D(64,0)}\right) + {}_{(9/12)}\bar{A}^{I}_{63,5:65}}{\frac{1}{2} \cdot \bar{a}(63,\,0) + \frac{1}{2} \cdot \bar{a}(64,\,0)} \cdot E(65) \\ &\approx \frac{14,25084 + 0,02382}{15,70344} \cdot 12\ 000\ € \\ &\approx 10\ 908\ €. \end{aligned}$$

10.7.2 Rahastoidun vanhuuseläkkeen muuntaminen

Työntekijän eläkelain mukaisessa vakuutuksessa vanhuuseläkkeestä osa rahastoidaan eläkeiälle 65 vuotta. Eläkkeen alkaessa muussa kuin 65 vuoden iässä rahastoitua eläkettä muunnetaan soveltamalla muunnoskaavaa, joka on esitetty tarkemmin kohdassa 8.2.

Lasketaan rahastoidun vanhuuseläkkeen määrä eläkkeelle siirtyvälle 67 vuotta ja 3 kuukautta vanhalle naiselle, kun

- laskentahetki on 31.12.2018
- laskennallinen eläkeikä $w = 65$ vuotta
- käytettävä korkokanta $i = 3,00$ %
- kertynyt rahastoitu eläke $E^R(65) = 6\,000$ euroa vuodessa.

Henkilö on syntynyt vuonna 1951, joten työntekijän eläkelain mukainen ikäsiirto $b_2 = 0$. Kun ikäsiirto huomioidaan, saadaan liitteen D.1 naisten pääoma-arvokerrointaulukosta, että

$$\begin{aligned}
\overline{N}(65,0) &= 2,3759607 \\
\overline{N}(67,0) &= 2,1097462 \\
\overline{N}(68,0) &= 1,9836097.
\end{aligned}$$

Tällöin kaavan (8.6) perusteella eläkeikää z vastaavaksi muunnettu rahastoidun vanhuuseläkkeen määrä on

$$\begin{aligned}
E^R(67\,v\,3\,kk) &= \frac{\overline{N}(65,0)}{\overline{N}(67\,v\,3\,kk,0)} E^R(65) \\
&= \left(\frac{(12-3)}{12} \cdot \frac{\overline{N}(65,0)}{\overline{N}(67,0)} + \frac{3}{12} \cdot \frac{\overline{N}(65,0)}{\overline{N}(68,0)} \right) E^R(65) \\
&\approx 1,1440865 \cdot 6\,000 \text{ €} \\
&\approx 6\,865 \text{ €}.
\end{aligned}$$

10.8 Maksuperusteinen eläkejärjestely

Maksuperusteisessa eläkejärjestelyssä maksetut vakuutusmaksut rahastoidaan henkilökohtaisille tileille ja eläke määrätään eläkeiässä kertyneiden maksujen ja niille saatujen tuottojen perusteella.

Lasketaan vuosieläkkeen määrä E eläkkeelle siirtyvälle 65-vuotiaalle naiselle, kun

- laskentahetki on 31.12.2018
- käytettävä korkokanta $i = 3,00$ %
- eläkeikään mennessä kertynyt rahasto $V = 120\,000$ euroa.

Yksinkertaisuuden vuoksi laskennassa ei oteta huomioon eläkevakuutuksen hoitokuluja eikä sijoitustoiminnan riskejä.

Henkilö on syntynyt vuonna 1953, joten ikäsiirto $b_2 = 0$. Kun ikäsiirto huomioidaan, saadaan liitteen D.1 naisten pääoma-arvokerrointaulukosta, että $\bar{a}(65, 0) = 17,23566$. Tällöin vuosieläke on

$$E = \frac{V}{\bar{a}(65, 0)} = \frac{120\,000\text{ €}}{17,23566} \approx 6\,962\text{ €}.$$

LÄHTEET

Eläketurvakeskus (1968) Eräiden yhteisesti kustannettavien eläkemenojen määrääminen. Eläketurvakeskuksen yleiskirje n:o 8/68. Viitattu 12.1.2018. www.tyoelakelakipalvelu.fi.

Eläketurvakeskus (1972) Vastuunjaossa hyvitettävien eläkemenojen määrääminen. Eläketurvakeskuksen yleiskirje n:o 3/72. Viitattu 12.1.2018. www.tyoelakelakipalvelu.fi.

Eläketurvakeskus (1995) Vastuunjakoperusteiden soveltamisohjeet. Liite 1: TEL-peruseläketurvan, LEL:n TaEL:n ja MEL:n mukaisen vanhuuseläkkeen rahastoidun osan muuntaminen. Eläketurvakeskuksen yleiskirje B 2/95. Viitattu 12.1.2018. www.tyoelakelakipalvelu.fi.

Eläketurvakeskus (2002) Vanhuuseläkkeen rahastoidun osan muuntokertoimet. Eläketurvakeskuksen yleiskirje B 1/2002. Viitattu 12.1.2018. www.tyoelakelakipalvelu.fi.

Eläketurvakeskus (2018) Eläkejärjestelmän muutokset vuosi vuodelta. Eläketurvakeskuksen www-sivusto. Viitattu 30.1.2018. www.etk.fi.

Eläkevakuutuksen laskuperusteisiin liittyvä laskentatekniikka. Eläkelaitosten ja Eläketurvakeskuksen yhteisen työryhmän valmistelema ohje. 1990-luku.

Laskuperustemalli -62. Sosiaali- ja terveysministeriö 12.7.1962.

Mäkinen, H. (2018) Työeläkkeiden kustannustenjako. Eläketurvakeskuksen käsikirjoja 02/2018. Helsinki. www.etk.fi/julkaisu/tyoelakkeiden-kustannustenjako.

Pesonen, M. & Soininen, P. & Tuominen, T. (2014) Henkivakuutusmatematiikka. Finanssi- ja vakuutuskustannus Oy. Vantaa.

Salminen, S. (2015) Gompertz-kuolevuusmallin laajennus työntekijän eläkelaissa. Pro gradu -tutkielma. Helsingin yliopisto. Matemaattis-luonnontieteellinen tiedekunta. Matematiikan ja tilastotieteen laitos. Helsinki. http://urn.fi/URN:NBN:fi-fe2017112252074

Tuomikoski, J. & Sorainen, J. & Kilponen, S. (2007) Lakisääteisen työeläkevakuutuksen vakuutustekniikkaa. Eläketurvakeskuksen käsikirjoja 2007:4. Helsinki. http://urn.fi/URN:ISBN:978-951-691-077-5

Turtiainen, Y. ym. (1982) Henki- ja eläkevakuutuksen vakuutustekniikkaa. SHY. Helsinki

Työntekijäin eläkelain (TEL) mukaisen vakuutuksen yleiset laskuperusteet. Viitattu 2.3.2018. www.saadospalvelu.fi.

Työntekijäin eläkelain (TEL) mukaisen perusvakuutuksen erityisperusteet. Viitattu 2.3.2018. www.saadospalvelu.fi.

Työntekijän eläkelain (TyEL) mukaisen eläkevakuutuksen yleiset laskuperusteet. Viitattu 2.3.2018. www.saadospalvelu.fi.

Työntekijän eläkelain (TyEL) mukaisen eläkevakuutuksen erityisperusteet. Viitattu 2.3.2018. www.saadospalvelu.fi.

Työntekijäin eläkelaki (TEL) (395/1961).

Työntekijän eläkelaki (TyEL) (395/2006).

LIITTEET

Liite A Vakiot

A.1 Yleisvakiot

Yleisvakiot ovat laskuperustemallin parametreja, joiden on oletettu olevan vakuutettujen joukosta riippumattomia ja ajassa muuttumattomia tai sellaisia, että niiden arvojen muuttamiseen on tarvetta hyvin harvoin.

Esimerkeissä ja taulukoissa on käytetty seuraavia työntekijän eläkelain mukaisen eläkevakuutuksen yleisissä laskuperusteissa määriteltyjä yleisvakioita.

Kuolevuus, vanhuus- ja leskeneläkkeet

Naiset

$k = 70$

$a_{1,1} = e^{\frac{6}{7} \cdot 1{,}031 - 11{,}86}$

$a_{1,2} = \frac{6}{7} \cdot 0,1031$

$a_{2,1} = e^{\frac{6}{7} \cdot 1{,}416 - 14{,}79}$

$a_{2,2} = \frac{6}{7} \cdot 0,1416$

Miehet

$k = 70$

$a_{1,1} = e^{\frac{6}{7} \cdot 1{,}027 - 11{,}18}$

$a_{1,2} = \frac{6}{7} \cdot 0,1027$

$a_{2,1} = e^{\frac{6}{7} \cdot 1{,}217 - 12{,}68}$

$a_{2,2} = \frac{6}{7} \cdot 0,1217$

Kuolevuus, työkyvyttömyyseläkkeet

$a_4 = 0,002 \cdot \ln 10$

Työkyvyttömyys

$a_5 = 2,2 \cdot 10^{-5}$

$a_6 = 7,9 \cdot 10^{-6}$

$a_7 = 2,6 \cdot 10^{-6}$

$a_8 = 0,08$

$a_9 = 0,14$

$a_{10} = 0,12$

$a_{11} = 0,705$

$a_{12} = 0,156$

$a_{13} = 0,17$

Avioisuus

$a_{34} = 0,73$

$a_{35} = 6,50$

$a_{36} = 3,89$

$a_{37} = 0,12$

$a_{38} = 70$

$a_{39} = 0,74$

$a_{40} = 9,00$

$a_{41} = 3,74$

$a_{42} = -0,04$

$a_{43} = 60$

Aviopuolison ikä

$a_{44} = 0,909$

$a_{45} = 2,281$

$a_{46} = 0,936$

$a_{47} = 5,340$

Syntyvyys

$a_{48} = 2,9 \cdot 10^{-9}$

$a_{49} = 15$

$a_{50} = 50$

$a_{51} = 0,09$

Vastaisen lapseneläkkeen pääoma-arvon laskennassa käytettäviä vakioita

Vakuutusteknisiä suureita laskettaessa käytettävä korkokanta (%)	a_{52}	a_{53}	a_{54}	a_{55}	a_{56}	a_{57}
0,00 %	0,095	0,00190	0,105	0,00170	0,117	0,00155
1,00 %	0,085	0,00185	0,095	0,00165	0,103	0,00150
2,00 %	0,079	0,00182	0,087	0,00163	0,093	0,00148
2,50 %	0,076	0,00181	0,083	0,00162	0,088	0,00146
2,70 %	0,075	0,00180	0,082	0,00161	0,086	0,00145
3,00 %	0,074	0,00180	0,080	0,00161	0,084	0,00145
3,50 %	0,071	0,00179	0,077	0,00160	0,080	0,00143
4,00 %	0,069	0,00179	0,074	0,00160	0,076	0,00142
4,25 %	0,068	0,00179	0,073	0,00159	0,074	0,00142
4,50 %	0,067	0,00178	0,071	0,00158	0,073	0,00141
4,75 %	0,066	0,00178	0,069	0,00157	0,072	0,00141
5,00 %	0,650	0,00178	0,068	0,00157	0,071	0,00141
6,00 %	0,061	0,00176	0,063	0,00154	0,065	0,00139
7,00 %	0,057	0,00174	0,058	0,00151	0,059	0,00137

A.2 Erikoisvakiot

Erikoisvakiot valitaan käyttötarkoituksen perusteella ja niiden avulla voidaan huomioida esimerkiksi vakuutettavan kannan erityisrakenne. Erikoisvakiot sisältyvät erityisperusteisiin, joten niiden muuttaminen voidaan tehdä ilman, että koko laskuperustemallia muutetaan.

Esimerkeissä ja taulukoissa on käytetty seuraavia työntekijän eläkelain mukaisen eläkevakuutuksen erityisperusteissa määriteltyjä erikoisvakioita.

Vanhuuseläkkeet ja leskeneläkkeet

Kuolevuuden syntymävuosikohtainen riippuvuus on otettu huomioon siten, että ikäsiirto sekä naisilla että miehillä on

$$b_2 = \begin{cases} 5, & \text{kun } v - x < 1930 \\ 3, & \text{kun } 1930 \leq v - x < 1940 \\ 2, & \text{kun } 1940 \leq v - x < 1950 \\ 0, & \text{kun } 1950 \leq v - x < 1960 \\ -2, & \text{kun } 1960 \leq v - x < 1970 \\ -3, & \text{kun } 1970 \leq v - x < 1980 \\ -5, & \text{kun } 1980 \leq v - x < 1990 \\ -7, & \text{kun } 1990 \leq v - x < 2000 \\ -8, & \text{kun } 2000 \leq v - x < 2010 \\ -10, & \text{kun } 2010 \leq v - x < 2020. \end{cases}$$

Työkyvyttömyyseläkkeet

$$\begin{aligned} b_3 &= 1 \\ b_4 &= 1 \\ b_5 &= 1 \\ b_6 &= 1 \\ b_7 &= 1 \\ b_8 &= 1. \end{aligned}$$

Liite B TyEL:n ja TEL:n mukaisen eläkevakuutuksen kuolevuusperuste vuosina 1962–2018

Työntekijän eläkelain mukaisen eläkevakuutuksen vanhuus- ja perhe-eläkkeiden pääoma-arvokertoimien laskennassa on 31.12.2016 alkaen käytetty kaksiosaista kuolevuusmallia:

$$\mu_x = \begin{cases} \mu_{1,x} = a_{1,1}e^{a_{1,2}(x+b_2)}, & \text{kun } (x+b_2) \leq k \\ \mu_{2,x} = a_{2,1}e^{a_{2,2}(x+b_2)}, & \text{kun } (x+b_2) > k. \end{cases}$$

Ennen 31.12.2016 käytettiin yksiosaista kuolevuusmallia

$$\mu_x = a_1 e^{a_2(x+b_2)}.$$

Ennen 1.7.1990 yksiosainen kuolevuusmalli sisälsi lisäksi sukupolvikuolleisuutta varten tarkoitetun termin $-a_3 Å$ eli

$$\mu_x = a_1 e^{a_2(x+b_2)-a_3 Å}.$$

Käytännössä yleisvakiota a_3 ei otettu käyttöön ja sen arvo pysyi nollassa kunnes vuonna 1990 termi $-a_3 Å$ yhdistettiin erikoisvakioon b_2. Jo tätä aiemmin eli vuoden 1986 lopussa sukupolvien väliset erot oli alettu ottaa huomioon vakioissa b_2. (TEL yleiset laskuperusteet, TEL-P-erityisperusteet, Tuomikoski ym. 2007).

Vanhuuseläkkeiden ja leskeneläkkeiden pääoma-arvojen laskennassa kuolevuusperusteessa on käytetty samoja yleisvakioita, mutta eri erikoisvakioita b_2. Perhe-eläkkeet liitettiin vuonna 1967 työntekijäin eläkelain mukaisen perusvakuutuksen mukaisiin eläke-etuihin, jonka piirissä niitä rahastoitiin vuosina 1971–1993 (Eläketurvakeskus 1968, Eläketurvakeskus 1972, Mäkinen 2018).

Työkyvyttömyyseläkkeiden pääoma-arvokertoimien laskennassa on työeläkejärjestelmän alusta lähtien käytetty vakiokuolevuutta $\mu_x = a_4$.

Työttömyyseläkkeet olivat osa työeläkejärjestelmää vuosina 1971–2014, mutta niitä alettiin rahastoida vasta vuodesta 1989 lähtien (Mäkinen 2018). Työttömyyseläkkeisiin sovellettiin samoja kuolevuusperusteen vakioita kuin vanhuuseläkkeisiin.

Yksilöllinen varhaiseläke liitettiin työeläkejärjestelmään vuonna 1986 ja lakkautettiin vuonna 2005 vuoden 1943 jälkeen syntyneiltä (Eläketurvakeskus 2018). Yksilöllisiin varhaiseläkkeisiin sovellettiin 31.12.1991 alkaen samoja kuolevuusperusteen vakioita kuin vanhuuseläkkeisiin (TEL-P-laskuperusteet, Tuomikoski ym. 2007).

Kuolevuuteen liittyvien yleis- ja erikoisvakioiden arvot eri vuosina esitetään taulukoissa B.1 ja B.2.

Taulukko B.1.
TyEL:n ja TEL:n mukaisen perusvakuutuksen mukaiset eläkkeiden pääoma-arvojen laskennassa käytetyt kuolevuuteen liittyvät yleisvakiot $a_{i,j}$ ja a_j sekä vanhuuseläkkeiden, työttömyyseläkkeiden ja yksilöllisten varhaiseläkkeiden yhteydessä käytetyt erikoisvakiot b_2 eli ikäsiirrot vuodesta 1962 alkaen.

31.12.2016 alkaen			Ikäsiirrot b_2		
$a_{i,j}$	Nainen	Mies	Syntymävuosi	Nainen	Mies
$a_{1,1}$	$e^{\frac{6}{7}\cdot 1{,}031-11{,}86}$	$e^{\frac{6}{7}\cdot 1{,}027-11{,}18}$	$v-x<1930$	5	5
			$1930 \le v-x < 1940$	3	3
$a_{2,1}$	$e^{\frac{6}{7}\cdot 1{,}416-14{,}79}$	$e^{\frac{6}{7}\cdot 1{,}217-12{,}68}$	$1940 \le v-x < 1950$	2	2
			$1950 \le v-x < 1960$	0	0
$a_{1,2}$	$\frac{6}{7}\cdot 0{,}1031$	$\frac{6}{7}\cdot 0{,}1027$	$1960 \le v-x < 1970$	-2	-2
			$1970 \le v-x < 1980$	-3	-3
$a_{2,2}$	$\frac{6}{7}\cdot 0{,}1416$	$\frac{6}{7}\cdot 0{,}1217$	$1980 \le v-x < 1990$	-5	-5
			$1990 \le v-x < 2000$	-7	-7
a_4	$0{,}002 \cdot \ln 10$	$0{,}002 \cdot \ln 10$	$2000 \le v-x < 2010$	-8	-8
			$2010 \le v-x < 2020$	-10	-10
k	70 vuotta	70 vuotta			
1.1.2008–30.12.2016			Ikäsiirrot b_2		
a_j	Nainen	Mies	Syntymävuosi	Nainen	Mies
a_1	$5 \cdot 10^{-5} \cdot e^{-0{,}57}$	$5 \cdot 10^{-5} \cdot e^{-0{,}57}$	$v-x<1940$	-7	0
			$1940 \le v-x < 1950$	-8	-1
a_2	0,095	0,095	$1950 \le v-x < 1960$	-9	-2
			$1960 \le v-x < 1970$	-10	-3
a_4	$0{,}002 \cdot \ln 10$	$0{,}002 \cdot \ln 10$	$1970 \le v-x < 1980$	-11	-4
			$1980 \le v-x < 1990$	-12	-5
			$1990 \le v-x$	-13	-6

1.1.2003–31.12.2007			Ikäsiirrot b_2		
a_j	Nainen	Mies	Syntymävuosi	Nainen	Mies
a_1	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$v - x < 1940$	-13	-6
			$1940 \leq v - x < 1950$	-14	-7
a_2	0,095	0,095	$1950 \leq v - x < 1960$	-15	-8
			$1960 \leq v - x < 1970$	-16	-9
a_4	$0{,}002 \cdot \ln 10$	$0{,}002 \cdot \ln 10$	$1970 \leq v - x < 1980$	-17	-10
			$1980 \leq v - x$	-18	-11

1.1.2002–31.12.2002			Ikäsiirrot b_2		
a_j	Nainen	Mies	Syntymävuosi	Nainen	Mies
a_1	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$v - x < 1940$	-13	-6
			$1940 \leq v - x < 1950$	-14	-7
a_2	0,095	0,095	$1950 \leq v - x < 1960$	-15	-8
			$1960 \leq v - x < 1970$	-16	-9
a_4	$0{,}002 \cdot \ln 10$	$0{,}002 \cdot \ln 10$	$1970 \leq v - x$	-17	-10

1.1.1997–31.12.2001			Ikäsiirrot b_2		
a_j	Nainen	Mies	Syntymävuosi	Nainen	Mies
a_1	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$v - x < 1940$	-13	-5
			$1940 \leq v - x < 1950$	-13	-5
a_2	0,095	0,095	$1950 \leq v - x < 1960$	-14	-6
			$1960 \leq v - x < 1970$	-15	-7
a_4	$0{,}002 \cdot \ln 10$	$0{,}002 \cdot \ln 10$	$1970 \leq v - x$	-16	-8

1.1.1993–31.12.1996			Ikäsiirrot b_2		
a_j	Nainen	Mies	Syntymävuosi	Nainen	Mies
a_1	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$v - x < 1940$	-11	-2
			$1940 \leq v - x < 1950$	-12	-3
a_2	0,095	0,095	$1950 \leq v - x < 1960$	-13	-4
			$1960 \leq v - x < 1970$	-14	-5
a_4	$0{,}002 \cdot \ln 10$	$0{,}002 \cdot \ln 10$	$1970 \leq v - x$	-15	-6

31.12.1986–31.12.1992			Ikäsiirrot b_2		
a_j	Nainen	Mies	Syntymävuosi	Nainen	Mies
a_1	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	$v-x < 1940$	-11	-2
a_2	0,095	0,095	$1940 \leq v-x < 1950$	-12	-3
a_3	0	0	$1950 \leq v-x < 1960$	-13	-4
a_4	$0{,}002 \cdot \ln 10$	$0{,}002 \cdot \ln 10$	$1960 \leq v-x$	-14	-5
a_3 poistui käytöstä 1.7.1990					
31.12.1982–30.12.1986			Ikäsiirrot b_2		
a_j	Nainen	Mies	Syntymävuosi	Nainen	Mies
a_1	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	Syntymävuodella	-9	-2
a_2	0,095	0,095	ei ole merkitystä		
a_3	0	0			
a_4	$0{,}002 \cdot \ln 10$	$0{,}002 \cdot \ln 10$			
31.12.1971–30.12.1982			Ikäsiirrot b_2		
a_j	Nainen	Mies	Syntymävuosi	Nainen	Mies
a_1	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	Syntymävuodella	-7	0
a_2	0,095	0,095	ei ole merkitystä		
a_3	0	0			
a_4	$0{,}002 \cdot \ln 10$	$0{,}002 \cdot \ln 10$			
Ennen 31.12.1971			Ikäsiirrot b_2		
a_j	Nainen	Mies	Syntymävuosi	Nainen	Mies
a_1	$5 \cdot 10^{-5}$	$5 \cdot 10^{-5}$	Syntymävuodella	-6	0
a_2	0,095	0,095	ei ole merkitystä		
a_3	0	0			
a_4	$0{,}002 \cdot \ln 10$	$0{,}002 \cdot \ln 10$			

Taulukko B.2.
TEL:n mukaisen perusvakuutuksen mukaiset perhe-eläkkeiden pääoma-arvojen laskennassa käytetyt ikäsiirrot b_2. Miesleskille tuli oikeus leskeneläkkeeseen 1.7.1990.

Ikäsiirrot b_2	**Edunjättäjä**		**Edunsaaja**	
	Mies	**Nainen**	**Mies**	**Nainen**
31.12.1990–31.12.1993	0	−9	−3	−12
31.12.1986–30.12.1990	0	−9	.	−12
31.12.1982–30.12.1986	1	−6	.	−9
31.12.1971–30.12.1982	3	−4	.	−7
Ennen 31.12.1971	3	−3	.	−6

Liite C Simpsonin sääntö

Oletetaan, että x on välillä $[0,\infty)$ oleva kokonaisluku, funktio f samalla välillä integroituva funktio ja lisäksi $f(t) \approx 0$, kun $t \geq a > x$. Nyt integraalia voidaan approksimoida niin sanottua Simpsonin 1/3-sääntöä käyttäen seuraavasti:

$$\begin{aligned}\int_x^\infty f(t)\ \mathrm{dt} \approx \int_x^a f(t)\ \mathrm{dt} &= \int_{t_0=x}^{t_2} f(t)\ \mathrm{dt} + \int_{t_2}^{t_4} f(t)\ \mathrm{dt} + \cdots + \int_{t_{2n-2}}^{t_{2n}=a} f(t)\ \mathrm{dt} \\ &\approx \frac{h}{3}\sum_{i=0}^{n-1}\Big[f(t_{2i}) + 4\cdot f(t_{2i+1}) + f(t_{2i+2})\Big],\end{aligned}$$

missä integroimisväli $[x,\, a]$ on jaettu parilliseen määrään, eli $2n$ kappaleeseen, yhtä pitkiä osavälejä $[t_i,\, t_i + h]$, $i = 0,\, 1,\, \cdots,\, 2n-1$, ja $h = (a-x)/2n$ on askelvälin pituus. Kun $h = 1$, saadaan

$$\int_x^a f(t)\ \mathrm{dt} \approx \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\frac{a-2-x}{2}}\Big[f(x+2i) + 4\cdot f(x+2i+1) + f(x+2i+2)\Big].$$

C.1 Simpsonin sääntö pääoma-arvokertoimien laskennassa

Nykyisin työeläkejärjestelmässä sovelletaan edellä esitettyä Simpsonin 1/3-säännön mukaista numeerista integrointimenetelmää asettamalla integroinnin askelvälin pituudeksi h yksi vuosi. Kyseistä approksimointimenetelmää voidaan käyttää kommutaatiofunktioiden ja pääoma-arvokertoimien laskennassa yksiosaisen kuolevuusmallin tapauksessa.

Pääoma-arvokertoimia approksimoitaessa oletetaan, että $f(t) \approx 0$, kun $t \geq 129$. Kun ikä x on välillä $[1,127]$ oleva pariton kokonaisluku, niin

$$\begin{aligned}\int_x^\infty f(t)\ \mathrm{dt} &\approx \int_x^{129} f(t)\ \mathrm{dt} \\ &\approx \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\frac{127-x}{2}}\Big[f(x+2i) + 4\cdot f(x+2i+1) + f(x+2i+2)\Big].\end{aligned}$$

Kun ikä x on välillä $[0,126]$ oleva parillinen kokonaisluku, niin

$$\begin{aligned}\int_x^{\infty} f(t)\ \mathrm{dt} &\approx \int_x^{129} f(t)\ \mathrm{dt} = \int_x^{128} f(t)\ \mathrm{dt} + \int_{128}^{129} f(t)\ \mathrm{dt}\\ &\approx \frac{1}{3}\sum_{i=0}^{\frac{126-x}{2}} \Big[f(x+2i)+4\cdot f(x+2i+1)+f(x+2i+2)\Big]+F(128),\end{aligned}$$

missä $F(128) \approx \frac{f(129)+f(128)}{2}$.

Jos $x \in [0,127]$ ei ole kokonaisluku, niin pääoma-arvokerroin voidaan laskea lineaarisesti interpoloimalla.

Kaksiosainen kuolevuusmalli sisältää epäjatkuvuuskohdan rajaiässä k. Sen vuoksi kaksiosaisen kuolevuusmallin tapauksessa kommutaatiofunktioita ja pääoma-arvokertoimia ei voida suoraan approksimoida yhden vuoden askelväliä käyttävällä Simpsonin säännöllä. Sen sijaan voidaan esimerkiksi joko laskea funktioiden arvot kahdessa vaiheessa tai soveltaa Simpsonin 1/3-sääntöä tihennetyllä askelvälillä.

Vaihettaisessa approksimointimenetelmässä ensin lasketaan kaksiosaisen kuolevuusmallin kumpaakin eri osaa vastaavien yksiosaisten kuolevuusmallien mukaiset kommutaatiofunktiot ja pääoma-arvokertoimet. Approksimoinnissa sovelletaan Simpsonin sääntöä käyttäen askelvälin pituutena h yhtä vuotta. Tämän jälkeen yksiosaisten kuolevuusmallien mukaisten funktioiden approksimoinnissa saadut tulokset yhdistetään Pääoma-arvokertoimet-käsikirjassa esitettyjen laskentakaavojen mukaisesti.

Simpsonin sääntöä voidaan soveltaa myös tiheämmällä jaolla esimerkiksi asettamalla integroinnin askelvälin pituudeksi h puoli vuotta. Tällöin kaksiosaisen kuolevuusmallin tapauksessa kommutaatiofunktioiden ja pääoma-arvokertoimien vaiheittainen laskenta ei ole tarpeen, vaan ne voidaan laskea soveltamalla suoraan Simpsonin sääntöä. Lisäksi Simpsonin säännön askelvälin tihentäminen lisää numeerisen integrointimenetelmän laskentatarkkuutta.

Liite D Pääoma-arvokerrointaulukot

Tähän kirjaan valitut pääoma-arvokerrointaulukot on laskettu käyttämällä pääoma-arvokertoimien tarkkoja arvoja ja lopputulokset on pyöristetty. Diskonttaus- ja kommutaatioluvut D_x, $\overline{N}_x$ ja $\overline{M}_x$ esitetään kahdeksan merkitsevän numeron tarkkuudella ja pääoma-arvokertoimet viiden desimaalin tarkkuudella. Taulukoita käytetään kohdan 10 esimerkkejä laskettaessa.

D.1 Diskonttaus- ja kommutaatiofunktiot

D.1.1 Diskonttaus- ja kommutaatiofunktiot, naiset 20–84 v

Diskonttokorko $i = 3,00$ %. Ikäsiirrot $b_2 = 0$.

Ikä x	D_x	$\overline{N}_x$	$\bar{a}_x$	$\overline{M}_x$
20	0,55315569	16,018617	28,95860	0,079664557
21	0,53698813	15,473585	28,81551	0,079607501
22	0,52128807	14,944485	28,66838	0,079546995
23	0,50604169	14,430857	28,51713	0,079482832
24	0,49123555	13,932255	28,36166	0,079414790
25	0,47685662	13,448244	28,20186	0,079342638
26	0,46289219	12,978403	28,03764	0,079266126
27	0,44932993	12,522325	27,86889	0,079184994
28	0,43615787	12,079613	27,69551	0,079098963
29	0,42336434	11,649883	27,51739	0,079007739
30	0,41093801	11,232762	27,33444	0,078911010
31	0,39886787	10,827889	27,14656	0,078808447
32	0,38714319	10,434911	26,95362	0,078699700
33	0,37575354	10,053491	26,75554	0,078584399
34	0,36468879	9,6832961	26,55222	0,078462151
35	0,35393905	9,3240080	26,34354	0,078332543
36	0,34349473	8,9753162	26,12941	0,078195136
37	0,33334647	8,6369199	25,90974	0,078049466
38	0,32348516	8,3085276	25,68442	0,077895040
39	0,31390194	7,9898569	25,45335	0,077731341
40	0,30458816	7,6806339	25,21646	0,077557818
41	0,29553540	7,3805935	24,97364	0,077373893
42	0,28673545	7,0894788	24,72481	0,077178950
43	0,27818032	6,8070410	24,46989	0,076972344
44	0,26986220	6,5330392	24,20880	0,076753389
45	0,26177348	6,2672402	23,94146	0,076521366
46	0,25390672	6,0094183	23,66782	0,076275511
47	0,24625466	5,7593552	23,38780	0,076015024
48	0,23881023	5,5168397	23,10135	0,075739058
49	0,23156650	5,2816678	22,80843	0,075446724

Ikä x	D_x	$\bar{N}_x$	$\bar{a}_x$	$\bar{M}_x$
50	0,22451669	5,0536421	22,50898	0,075137083
51	0,21765419	4,8325720	22,20298	0,074809152
52	0,21097253	4,6182734	21,89040	0,074461896
53	0,20446536	4,4105688	21,57123	0,074094227
54	0,19812648	4,2092866	21,24545	0,073705008
55	0,19194981	4,0142617	20,91308	0,073293046
56	0,18592941	3,8253349	20,57412	0,072857093
57	0,18005943	3,6423528	20,22861	0,072395847
58	0,17433416	3,4651678	19,87659	0,071907948
59	0,16874798	3,2936381	19,51809	0,071391982
60	0,16329540	3,1276273	19,15319	0,070846480
61	0,15797102	2,9670046	18,78195	0,070269920
62	0,15276956	2,8116443	18,40448	0,069660725
63	0,14768584	2,6614262	18,02086	0,069017272
64	0,14271479	2,5162351	17,63121	0,068337893
65	0,13785143	2,3759607	17,23566	0,067620878
66	0,13309092	2,2404979	16,83434	0,066864485
67	0,12842851	2,1097462	16,42740	0,066066944
68	0,12385960	1,9836097	16,01499	0,065226472
69	0,11937969	1,8619973	15,59727	0,064341279
70	0,11498444	1,7448221	15,17442	0,063409586
71	0,11089976	1,6318848	14,71495	0,062663205
72	0,10686898	1,5230046	14,25114	0,061850788
73	0,10288555	1,4181310	13,78358	0,060967295
74	0,098942935	1,3172199	13,31293	0,060007492
75	0,095034641	1,2202337	12,83988	0,058965993
76	0,091154269	1,1271413	12,36521	0,057837321
77	0,087295594	1,0379180	11,88969	0,056615982
78	0,083452653	0,95254490	11,41420	0,055296567
79	0,079619867	0,87100926	10,93960	0,053873876
80	0,075792180	0,79330347	10,46682	0,052343080
81	0,071965236	0,71942466	9,99684	0,050699905
82	0,068135583	0,64937390	9,53061	0,048940869
83	0,064300911	0,58315516	9,06916	0,047063543
84	0,060460328	0,52077405	8,61348	0,045066871

D.1.2 Diskonttaus- ja kommutaatiofunktiot, miehet 20–84 v

Diskonttokorko $i = 3,00$ %. Ikäsiirrot $b_2 = 0$.

Ikä x	D_x	$\overline{N}_x$	$\bar{a}_x$	$\overline{M}_x$
20	0,55265766	15,487754	28,02414	0,094858213
21	0,53645110	14,943239	27,85573	0,094746868
22	0,52071000	14,414696	27,68277	0,094628845
23	0,50542040	13,901668	27,50516	0,094503744
24	0,49056874	13,403710	27,32280	0,094371145
25	0,47614183	12,920389	27,13559	0,094230600
26	0,46212681	12,451289	26,94345	0,094081639
27	0,44851122	11,996002	26,74627	0,093923760
28	0,43528289	11,554137	26,54397	0,093756435
29	0,42242999	11,125311	26,33646	0,093579106
30	0,40994100	10,709156	26,12365	0,093391181
31	0,39780471	10,305312	25,90545	0,093192034
32	0,38601019	9,9134324	25,68179	0,092981004
33	0,37454681	9,5331811	25,45258	0,092757394
34	0,36340418	9,1642319	25,21774	0,092520466
35	0,35257221	8,8062691	24,97721	0,092269440
36	0,34204102	8,4589872	24,73091	0,092003494
37	0,33180101	8,1220900	24,47880	0,091721761
38	0,32184280	7,7952912	24,22080	0,091423324
39	0,31215721	7,4783136	23,95688	0,091107221
40	0,30273532	7,1708889	23,68699	0,090772433
41	0,29356838	6,8727579	23,41110	0,090417890
42	0,28464787	6,5836700	23,12917	0,090042467
43	0,27596543	6,3033829	22,84120	0,089644979
44	0,26751290	6,0316625	22,54718	0,089224181
45	0,25928231	5,7682831	22,24711	0,088778768
46	0,25126583	5,5130265	21,94101	0,088307370
47	0,24345582	5,2656826	21,62890	0,087808553
48	0,23584479	5,0260486	21,31083	0,087280814
49	0,22842539	4,7939291	20,98685	0,086722586

Ikä x	D_x	$\bar{N}_x$	$\bar{a}_x$	$\bar{M}_x$
50	0,22119043	4,5691363	20,65703	0,086132233
51	0,21413286	4,3514891	20,32145	0,085508050
52	0,20724576	4,1408138	19,98021	0,084848265
53	0,20052236	3,9369431	19,63344	0,084151040
54	0,19395602	3,7397167	19,28126	0,083414473
55	0,18754022	3,5489808	18,92384	0,082636600
56	0,18126860	3,3645882	18,56134	0,081815399
57	0,17513490	3,1863977	18,19396	0,080948798
58	0,16913302	3,0142744	17,82192	0,080034678
59	0,16325701	2,8480897	17,44544	0,079070885
60	0,15750104	2,6877204	17,06478	0,078055240
61	0,15185946	2,5330495	16,68022	0,076985549
62	0,14632678	2,3839652	16,29206	0,075859624
63	0,14089770	2,2403614	15,90062	0,074675296
64	0,13556709	2,1021370	15,50625	0,073430442
65	0,13033008	1,9691960	15,10930	0,072123007
66	0,12518201	1,8414472	14,71016	0,070751033
67	0,12011848	1,7188038	14,30924	0,069312698
68	0,11513541	1,6011834	13,90696	0,067806349
69	0,11022905	1,4885074	13,50377	0,066230550
70	0,10539599	1,3807009	13,10013	0,064584129
71	0,10092263	1,2775453	12,65866	0,063159923
72	0,096492496	1,1788412	12,21692	0,061647362
73	0,092101454	1,0845473	11,77557	0,060043534
74	0,087745918	0,99462646	11,33530	0,058345952
75	0,083422946	0,90904463	10,89682	0,056552676
76	0,079130357	0,82777044	10,46085	0,054662454
77	0,074866868	0,75077421	10,02812	0,052674882
78	0,070632243	0,67802708	9,59940	0,050590574
79	0,066427440	0,60949979	9,17542	0,048411357
80	0,062254784	0,54516148	8,75694	0,046140464
81	0,058118125	0,48497822	8,34470	0,043782750
82	0,054022999	0,42891139	7,93942	0,041344892
83	0,049976774	0,37691592	7,54182	0,038835591
84	0,045988766	0,32893843	7,15258	0,036265740

D.2 Työkyvyttömyyseläkkeet

Diskonttokorko $i = 3,00$ %. Vanhuuseläkeikä $w = 66$. Aika $\psi = 9/12$.

Ikä x	$(\Psi)\bar{A}^{I}_{x:w}$	$\bar{A}^{IA}_{(v)+(x-v):w}$ $x-v=1\,v$	$x-v=3\,v$	$x-v=5\,v$
17	1,16904	12,88040	-	-
18	1,20740	13,03355	-	-
19	1,24678	13,17716	16,05961	-
20	1,28715	13,31073	16,08577	-
21	1,32850	13,43379	16,10172	17,29958
22	1,37080	13,54588	16,10729	17,24295
23	1,41401	13,64656	16,10230	17,17804
24	1,45810	13,73538	16,08657	17,10465
25	1,50300	13,81192	16,05991	17,02255
26	1,54864	13,87575	16,02211	16,93150
27	1,59492	13,92647	15,97295	16,83124
28	1,64176	13,96368	15,91221	16,72150
29	1,68901	13,98696	15,83963	16,60197
30	1,73653	13,99591	15,75493	16,47233
31	1,78414	13,99015	15,65785	16,33226
32	1,83163	13,96926	15,54807	16,18139
33	1,87877	13,93283	15,42527	16,01933
34	1,92527	13,88047	15,28909	15,84568
35	1,97083	13,81173	15,13916	15,66001
36	2,01507	13,72620	14,97508	15,46187
37	2,05758	13,62342	14,79643	15,25076
38	2,09790	13,50292	14,60276	15,02617
39	2,13548	13,36424	14,39357	14,78758
40	2,16975	13,20686	14,16836	14,53439
41	2,20003	13,03027	13,92657	14,26602
42	2,22558	12,83390	13,66763	13,98182
43	2,24559	12,61717	13,39091	13,68113
44	2,25916	12,37948	13,09577	13,36323

Ikä x	${}_{(\Psi)}\bar{A}^{I}_{x:w}$	$\bar{A}^{IA}_{(v)+(x-v):w}$ $x-v=1\,v$	$x-v=3\,v$	$x-v=5\,v$
45	2,26532	12,12018	12,78151	13,02739
46	2,26302	11,83859	12,44739	12,67282
47	2,25113	11,53399	12,09264	12,29869
48	2,22847	11,20561	11,71644	11,90414
49	2,19380	10,85266	11,31791	11,48826
50	2,14589	10,47427	10,89616	11,05008
51	2,08349	10,06955	10,45019	10,58860
52	2,00543	9,63754	9,97900	10,10276
53	1,91069	9,17724	9,48152	9,59144
54	1,79843	8,68758	8,95660	9,05347
55	1,66818	8,16743	8,40305	8,48763
56	1,51994	7,61558	7,81961	7,89263
57	1,35441	7,03076	7,20496	7,26711
58	1,17321	6,41162	6,55768	6,60963
59	0,97924	5,75669	5,87631	5,91872
60	0,77710	5,06441	5,15925	5,19278
61	0,57357	4,33300	4,40484	4,43015
62	0,37834	3,56049	3,61125	3,62907
63	0,20489	2,74452	2,77647	2,78765
64	0,07158	1,88209	1,89824	1,90387
65	0,00325	0,96920	0,97387	0,97550

D.3 Vastaiset perhe-eläkkeet

D.3.1 Perhe-eläkkeet, nainen edunjättäjänä (20–84 v)

Diskonttokorko $i = 3,00$ %. $f = 0,99$. Lapseneläkkeen pääteikä $w = 18$.

Nainen edunjättäjänä $b_2 = -5$; mies edunsaajana $b_2 = -3$.

Edunjättäjän ikä x	$\bar{A}_x^{P_{leski}}$	$\bar{A}_{x:w}^{P_{lapsi}}$	${}_{(f)}\bar{A}_{x:w}^{P_1}$
20	0,28390	0,02044	0,30150
21	0,29231	0,02100	0,31038
22	0,30085	0,02153	0,31937
23	0,30949	0,02201	0,32841
24	0,31816	0,02244	0,33742
25	0,32684	0,02280	0,34637
26	0,33548	0,02306	0,35519
27	0,34407	0,02322	0,36385
28	0,35258	0,02327	0,37232
29	0,36102	0,02319	0,38060
30	0,36937	0,02297	0,38865
31	0,37764	0,02262	0,39648
32	0,38581	0,02212	0,40408
33	0,39389	0,02150	0,41145
34	0,40186	0,02074	0,41858
35	0,40971	0,01987	0,42548
36	0,41742	0,01890	0,43214
37	0,42496	0,01784	0,43855
38	0,43232	0,01671	0,44470
39	0,43946	0,01553	0,45060
40	0,44635	0,01431	0,45620
41	0,45293	0,01310	0,46150
42	0,45918	0,01188	0,46647
43	0,46504	0,01069	0,47108
44	0,47045	0,00954	0,47528
45	0,47536	0,00845	0,47906
46	0,47972	0,00742	0,48234
47	0,48347	0,00646	0,48509
48	0,48654	0,00557	0,48725
49	0,48888	0,00477	0,48876

Edunjättäjän ikä x	$\bar{A}_x^{P_{leski}}$	$\bar{A}_{x:w}^{P_{lapsi}}$	${}_{(f)}\bar{A}_{x:w}^{P_1}$
50	0,49042	0,00405	0,48956
51	0,49111	0,00341	0,48960
52	0,49088	0,00284	0,48881
53	0,48970	0,00235	0,48715
54	0,48751	0,00192	0,48455
55	0,48426	0,00156	0,48097
56	0,47990	0,00125	0,47635
57	0,47441	0,00100	0,47066
58	0,46775	0,00078	0,46385
59	0,45990	0,00061	0,45591
60	0,45083	0,00047	0,44679
61	0,44055	0,00036	0,43650
62	0,42904	0,00026	0,42501
63	0,41635	0,00019	0,41238
64	0,40249	0,00013	0,39860
65	0,38753	0,00009	0,38374
66	0,37151	0,00005	0,36785
67	0,35455	0,00003	0,35104
68	0,33674	0,00001	0,33338
69	0,31822	0,00000	0,31504
70	0,29910	0,00000	0,29611
71	0,27955	0,00000	0,27676
72	0,25971	0,00000	0,25712
73	0,23978	0,00000	0,23738
74	0,21995	0,00000	0,21776
75	0,20040	0,00000	0,19840
76	0,18730	0,00000	0,18543
77	0,17410	0,00000	0,17236
78	0,16092	0,00000	0,15932
79	0,14788	0,00000	0,14640
80	0,13509	0,00000	0,13374
81	0,12266	0,00000	0,12144
82	0,11069	0,00000	0,10958
83	0,09924	0,00000	0,09825
84	0,08841	0,00000	0,08753

D.3.2 Perhe-eläkkeet, mies edunjättäjänä (20–84 v)

Diskonttokorko $i = 3,00$ %. $f = 0,99$. Lapseneläkkeen pääteikä $w = 18$.

Mies edunjättäjänä $b_2 = -2$; nainen edunsaajana $b_2 = -3$.

Edunjättäjän ikä x	$\bar{A}_x^{P_{leski}}$	$\bar{A}_{x:w}^{P_{lapsi}}$	${}_{(f)}\bar{A}_{x:w}^{P_1}$
20	1,30976	0,05578	1,35244
21	1,34920	0,05743	1,39313
22	1,38972	0,05907	1,43489
23	1,43129	0,06071	1,47769
24	1,47382	0,06229	1,52137
25	1,51723	0,06378	1,56584
26	1,56140	0,06513	1,61091
27	1,60626	0,06630	1,65650
28	1,65171	0,06722	1,70241
29	1,69769	0,06788	1,74859
30	1,74414	0,06820	1,79490
31	1,79103	0,06819	1,84131
32	1,83832	0,06779	1,88773
33	1,88602	0,06702	1,93418
34	1,93408	0,06585	1,98059
35	1,98251	0,06432	2,02701
36	2,03128	0,06241	2,07338
37	2,08038	0,06020	2,11978
38	2,12977	0,05767	2,16614
39	2,17943	0,05491	2,21255
40	2,22929	0,05194	2,25894
41	2,27934	0,04883	2,30537
42	2,32945	0,04559	2,35174
43	2,37960	0,04232	2,39812
44	2,42964	0,03902	2,44437
45	2,47952	0,03578	2,49051
46	2,52908	0,03258	2,53637
47	2,57821	0,02952	2,58195
48	2,62673	0,02656	2,62702
49	2,67451	0,02378	2,67154

Edunjättäjän ikä x	$\bar{A}_x^{P_{leski}}$	$\bar{A}_{x:w}^{P_{lapsi}}$	${}_{(f)}\bar{A}_{x:w}^{P_1}$
50	2,72131	0,02114	2,71524
51	2,76698	0,01871	2,75803
52	2,81124	0,01644	2,79957
53	2,85388	0,01439	2,83973
54	2,89455	0,01249	2,87810
55	2,93302	0,01080	2,91450
56	2,96887	0,00926	2,94844
57	3,00177	0,00791	2,97967
58	3,03125	0,00669	3,00763
59	3,05692	0,00564	3,03199
60	3,07821	0,00469	3,05212
61	3,09469	0,00390	3,06764
62	3,10574	0,00318	3,07786
63	3,11093	0,00259	3,08241
64	3,10964	0,00206	3,08060
65	3,10149	0,00164	3,07212
66	3,08597	0,00125	3,05636
67	3,06285	0,00097	3,03319
68	3,03180	0,00068	3,00216
69	2,99281	0,00050	2,96338
70	2,94578	0,00029	2,91662
71	2,89098	0,00018	2,86225
72	2,82851	0,00003	2,80026
73	2,78566	0,00000	2,75781
74	2,73580	0,00000	2,70844
75	2,67932	0,00000	2,65253
76	2,61642	0,00000	2,59026
77	2,54759	0,00000	2,52211
78	2,47306	0,00000	2,44833
79	2,39355	0,00000	2,36961
80	2,30959	0,00000	2,28650
81	2,22162	0,00000	2,19941
82	2,13008	0,00000	2,10878
83	2,03543	0,00000	2,01507
84	1,93812	0,00000	1,91874

01
2018

ELÄKETURVAKESKUKSEN
KÄSIKIRJOJA

Pääoma-arvokertoimet

Käsikirjassa tarkastellaan työeläkejärjestelmässä käytettyjä pääoma-arvokertoimia. Uudistetun kirjan laskentakaavoissa otetaan huomioon 31.12.2016 voimaan tullut TyEL:n mukaisen eläkevakuutuksen uusi kaksiosaisen kuolevuusperusteen mukainen kuolevuusmalli.

Käsikirjassa kerrotaan, miten pääoma-arvokertoimet lasketaan eri eläkelajeissa. Mukana ovat vanhuus-, työkyvyttömyys- ja perhe-eläkkeet sekä hautausavustus. Esimerkkien muodossa näytetään, miten pääoma-arvokertoimia käytetään muun muassa rahastoitavien vakuutusmaksujen ja vastuuvelan laskennassa. Lisäksi uudistettu kirja sisältää ohjeet pääoma-arvokertoimien interpolointiin.

ELÄKETURVAKESKUKSEN KÄSIKIRJOJA

Eläketurvakeskus on lakisääteinen työeläketurvan kehittäjä, asiantuntija ja yhteisten palvelujen tuottaja. Käsikirjoja-sarjassa julkaistaan oppaita ja hakuteoksia työeläketurvan toimeenpanoon ja asiantuntijoille.

Eläketurvakeskus
PENSIONSSKYDDSCENTRALEN